1 Fibonaccijeva stevila

Fibonaccijevo število F_n , kjer je $n \in \mathbb{N}$, lahko definiramo kot število načinov zapisa števila n kot vsoto sumandov, enakih 1 ali 2. Na primer, število 4 lahko zapišemo v obliki naslednjih vsot:

$$2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 1 + 1 + 2 = 1 + 1 + 1 + 1,$$

odkod sledi, da je $F_4 = 5$.

Fibonaccijeva števila zadoščajo naslednji rekurzivni zvezi:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ kjer je } n \geq 3. \tag{1}$$

Tega ni težko pokazati. Naj bodo vsote, ki vsebujejo sumande 1 in 2, razdeljene v dve disjunktni množici M_1 in M_2.

$M_1 = \{$vsote, ki se končujejo s sumandom 1$\}$,

$M_1 = \{$vsote, ki se končujejo s sumandom 2$\}$.

Moč množice M_1 je enaka F_{n-1}, saj je vsota vseh členov z izjemo zadnjega enaka $n - 1$.

Iz podobnega razloga je moč množice M_2 je enaka F_{n-2} (toliko imamo namreč vsot števila n, sestavljenih iz sumandov 1 in 2, z fiksno 2 na mestu zadnjega člena; vsota vseh členov z izjemo zadnjega enaka $n - 2$).

Ker sta očitno množici disjunktni, sklepamo, da velja (1).

Začetna pogoja $F_1 = 1$ in $F_2 = 2$ določita rekurzivno zaporedje za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Postavimo še pogoj $F_0 = 1$.

Splošni člen F_n zapišemo tudi v obliki eksplicitne formule

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right) \tag{2}$$

Zlahka dokažemo s pomočjo nekaj teorije iz metod reševanja rekurzivnih zaporedij.

(2) zapišemo kot

$$\alpha^2 + \alpha = 1, \text{ ki ima za korena } \alpha_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Ker sta korena različna ($\alpha_1 \neq \alpha_2$), poiščemo F_n z nastavkom

$$F_n = k_1\alpha_1^n + k_2\alpha_2^n = k_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + k_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n. \tag{3}$$

Z upoštevanjem začetnih pogojev $F_1 = 1$ in $F_0 = 1$ sledi

$$\begin{aligned} F_1 &= 1 = k_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + k_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \\ F_2 &= 1 = k_1 + k_2. \end{aligned}$$

Rešitev sistema je par $(k_1, k_2) = (\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}})$, kar v (3) da rezultat (2).

O (2) bi lahko povedali marsikaj. Opazimo lahko, da je $|\alpha_2| = \left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| < 1$ in $|\alpha_1| = \left|\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right| > 1$. Potemtakem je limita

$$\lim_{n\to\infty} F_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}.$$

Odtod sledi, da je za velike n število F_n najbližje celo število številu $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$. V posebnem primeru velja

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Število α imenujemo tudi *število zlatega reza*. Med drugim je to tudi dolžina ene izmed diagonal v pravilnem pretkotniku s stranico 1, točka, ki na enotskem intervalu določa enakost razmerij večjega dela proti celoti in manjšega dela proti večjemu delu.

2 Funkcija Fibonaccijevega naslednika

Definirali bomo funkcijo na naravnih številih, ki ima to lastnost, da vsako Fibonaccijevo število preslika v naslednje Fibonaccijevo število; skratka številu določi Fibonaccijevega naslednika.

Izrek 1 *Vsako naravno število n lahko enolično zapišemo v obliki*

$$n = F_{i_1} + F_{i_1} + ... + F_{i_k}, \tag{4}$$

kjer je $i_{j+1} \geq i_{j+2}$ za $j = 1, ..., k-1$;drugače povedano: v obliki vsote nezaporednih Fibonaccijevih števil.

Opomba Izrazu (4) pravimo tudi *Fibonaccijeva predstavitev* števila n.
Za dokaz izreka potrebujemo pomožno trditev:

Lema 1 *Naj bo k naravno število. Potem velja*

$$\begin{aligned} F_1 + F_3 + ... + F_{2k-1} &= F_{2k} - 1, \\ F_2 + F_4 + ... + F_{2k} &= F_{2k+1} - 1 \ . \end{aligned}$$

Dokaz: Dokažimo le za lihe člene (za sode poteka dokaz podobno).
Velja $F_1 = F_2 - 1$.
Indukcijski korak $2k-1 \to 2k+1$: Naj velja $F_1+F_3+...+F_{2k-1} = F_{2k+1}-1$, prištejmo člen F_{2k+1}na levi in na desni strani enakosti. Desna stran je enaka $F_{2k} + F_{2k+1} - 1 = F_{2k+2} - 1$, kar je natanko tisto, kar smo želeli pokazati.

Naj bo sedaj n poljubno naravno število in naj bo F_k največje Fibonacijevo število, ki je manjše od n. Iz leme sledi, da je F_k v Fibonaccijevi predstavitvi števila n, saj je vsota vseh nezaporednih Fibonaccijevih števil, manjših od F_k, kvečjemu le $F_k - 1$.

Število $n - F_k$ ne vsebuje Fibonaccijevega predhodnika F_{k-1}, saj je $n < F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$,od kod sledi $n - F_k < F_{k-1}$.

Naslednje Fibonaccijevo število, ki nastopa v predstavitvi števila n, je največje Fibonaccijevo število F_m, manjše od $n - F_k$ in velja $k - m \geqq 2$.Z induktivnim sklepom pridemo do enolične Fibonaccijeve predstavitve (4) števila n.

Definicija 1 *Naj bo $n = F_{i_1} + F_{i_1} + ... + F_{i_k}$ Fibonaccijeva predstavitev števila n. Funkcijo $\sigma : N \to N$ definirano kot*

$$\sigma(n) = F_{i_1+1} + F_{i_2+1} + ... + F_{i_k+1}$$

imenujemo funkcija Fibonaccijevega naslednika ($\sigma(n)$ imenujemo Fibonaccijev naslednik n).

Hitro opazimo naslednje lastnosti funkcije:

- $\sigma(F_k) = F_{k+1}$

  Dokaz: trivialno, $k = 1$.

- $\sigma(n) = m$ natanko tedaj, ko se F_1 ne nahaja v Fibonaccijevi predstavitvi števila m ; (m je Fibonaccijev naslednik števila n, če ne vsebuje F_1).

  Dokaz: ($\Longrightarrow$) Naj bo $\sigma(n) = m$. Potem velja $\sigma(n) = F_{i_1+1} + F_{i_2+1} + ... + F_{i_k+1}$, kjer je F_{i_1+1} najmanjše število v vsoti...

- $n + \sigma(n) = \sigma^2(n) \equiv \sigma(\sigma(n))$; (če želimo večkrat uporabiti funkcijo Fibonaccijev naslednik...)đ

  Dokaz:

$$\begin{aligned} n + \sigma(n) &= (F_{i_1} + F_{i_2} + ... + F_{i_k}) + (F_{i_1+1} + F_{i_2+1} + ... + F_{i_k+1}) = \\ &= (F_{i_1} + F_{i_1+1}) + (F_{i_2} + F_{i_2+1}) + ... + (F_{i_k} + F_{i_k+1}) = \\ &= F_{i_1+2} + F_{i_2+2} + ... + F_{i_k+2} = \sigma(\sigma(n)) \end{aligned}$$

Pokazali smo že, da je $\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, oziroma da se sosednji Fibonaccijevi števili razlikujeta približno za $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Naj bo $n \in \mathbb{N}$.

$$n\alpha = \alpha F_{i_1} + \alpha F_{i_2} + ... + \alpha F_{i_k} \doteq F_{i_1+1} + F_{i_2+1} + ... + F_{i_k+1} = \sigma(n)$$

Označimo $\rho(n)$ najbližje celo število številu $n\alpha$.

Izrek 2 *Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Označimo $\rho(n)$ najbližje celo število številu $n\alpha$. Potem velja natanko ena izmed naslednjih trditev:*

(i) $\sigma(n) = \rho(n)$

(ii) $\sigma(n) = \rho(n) + 1$.

Trditev (i) velja v primeru, če je n Fibonaccijev naslednik.

Dokaz:

Naj bo n Fibbonaccijev naslednik. Potem $F_1 = 1$ ne nastopa v zapisu števila n.

Definicijsko območje funkcije σ razširimo na $\mathbb{N}_0$ s predpisom $\sigma(0) = 0$.

3 Tabeliranje funkcije Fibonaccijevega naslednika

V nadaljevanju povejmo nekaj o naslednji tabeli:

0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	...
1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	...
2	4	6	10	16	26	42	68	110	178	...
3	6	9	15	24	39	63	102	165	267	...
4	8	12	20	32	52	84	136	220	356	...
5										...
6										...
7										...
8										...
9										...
10										...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

*: izraz 'prvi element vrstice' bo pomenil v tem poglavju prvi element v vrstici, ki se pojavi za dvojno črto (na primer: 4 je prvi element 2. vrstice).

Konstrukcija tabele (opis):

- prvi stolpec sestavljajo število 0 in vsa naravna števila, zapisana po vrsti z navadno urejenostjo,
- prva vrstica sestavlja zaporedje Fibonaccijevih števil, 1. element prvevrstice je F_1, sledi mu $F_2, ...$
- drugo vrstico začenja število 1, kateremu sledi število 3 (3 je najmanjše število, ki ga še nismo uporabili v zgornji vrstici; število 2 je sledilo številu 1 že v prvi vrstici, zato ga ne vzamemo, ...).Vsako naslednje število je vsota prejšnjih dveh...
- tretja, četrta,...n-ta vrstica je sestavljena principu druge: zaporednemu naravnemu številu v prvem stolpcu sledi v drugem stolpcu najmanjše število, ki ga prej v zaporedjih še nismo uporabili... Na primer: v četrti vrstici številu 3 sledi v drugem stolpcu število 6. To pa zato, ker sta števili 4 in 5 že sledili 3 znotraj prejšnjih vrstic.Vsako naslednje število je vsota prejšnjih dveh.

Matematični opis tabele:
Tabela pa ima še drug pomen, ki ga lahko tudi matematično opišemo.

Prva vrstica:

Fibbonacijevo zaporedje F_n, kjer je $n \geq 1$ (F_1 je prvi element desno od dvojne črte).

Druga vrstica:

Oglejmo si število 4,prvi element v drugi vrstici. Zanj velja

$$4 = 1 + 3 = F_1 + F_3,$$

kar pomeni, da je

$$\sigma(4) = F_2 + F_4 = 2 + 5 = 7,$$

kar je naslednji element v drugi vrstici. Podobno lahko izračunamo naprej:

$$\sigma(\sigma(4)) = \sigma(7) = F_3 + F_5 = 3 + 8 = 11$$

Vidimo lahko, da tako sestavljena druga vrstica (od dvojne črte desno) predstavlja dejansko seznam vseh Fibonaccijevih naslednikov $\sigma(n)$, kjer je $n \geq 3$.

Tretja vrstica:

Število 6 kot prvi element tretje vrstic je število, ki ga lahko zapišemo kot

$$6 = 5 + 1 = F_4 + F_1$$

Fibonaccijev naslednik števila 6 je

$$\begin{aligned} \sigma(6) &= F_5 + F_2 = 8 + 2 = 10 \\ \sigma(\sigma(6)) &= \sigma(10) = F_6 + F_3 = 13 + 3 = 16 \end{aligned}$$

Število 16 pa je naslednji element v tretji vrstici...

Podobno razmislimo tudi za naslednji element 26, ki je Fibonaccijev naslednjik števila 16, i.t.n.

Splošno:

Hitro opazimo, da je poljubno število v izbrani vrstici vsota prejšnjih dveh, hkrati pa Fibonaccijev naslednjik prejšnjega. To je preprosta posledica formule $n + \sigma(n) = \sigma(\sigma(n))$, ki rekurzivno določa Fibonaccijevega naslednika že določenega Fibonaccijevega naslednika.

Izrek 3 *Vsako naravno število se pojavi v tabeli natanko enkrat.*

Dokaz: Vzemimo poljubno število n, ki ima Fibonaccijevo predstavitev

$$n = F_{i_1} + F_{i_2} + ... + F_{i_k}$$

Ta se pojavi v poljubni vrstici v stolpcu i_1, je naslednik števila, ki se nahaja v stolpcu $i_1 - 1$ .Ta je oblike

$$\sigma^{-1}(n) = F_{i_1-1} + F_{i_2-1} + ... + F_{i_k-1}$$

(z $\sigma^{-1}(n)$ označimo predhodnika števila n). Njegov predhodnik $\sigma^{-1}(\sigma^{-1}(n)) \equiv \sigma^{-2}(n)$ se nahaja v stolpcu $i_1 - 2$ in je oblike

$$\sigma^{-2}(n) = F_{i_1-2} + F_{i_2-2} + ... + F_{i_k-2}$$

Če induktivno nadaljujemo s postopkom, pridemo do prvega elementa v vrstici, ki je oblike

$$m = F_1 + F_{i_2-i_1+1} + ... + F_{i_k-i_1+1}$$

Torej: Število je Fibonaccijev naslednik natanko tedaj, ko se ne nahaja v tabeli v prvi vrstici.

Če je Fibonaccijev naslednik, potem je očitno v tabeli (če ima najmanjši sumand F_{i_1}, se nahaja v i_1 stolpcu). Če število ni Fibonacijev naslednik, potem se nahaja v tabeli kot prvi element neke vrstice.

Ali se vsako število, ki ni Fibonaccijev naslednik, pojavlja v tabeli? Da, vsa števila, ki vsebujejo v Fibonaccijevi predstavitvi člen F_1, so kot prvi elementi neka vrstice in so navpično razporejeni po velikosti.Če bi se kakšno število, ki vsebuje F_1, ne pojavilo kot prvi element neke vrstice, potem tudi vseh njegovih Fibonacijevuh naslednikov ne bi bilo v tabeli, kar pa vemo, da ni res.

Odtod sledi, da se vsako število pojaviv tabeli.

Enoličnost dokažemo na naslednji način:

Če bi za dve naravni števili m in p veljalo $n = p$, bi potem imali enako Fibonaccijevo predstavitev:

$$m = n = F_{i_1} + F_{i_2} + ... + F_{i_k}$$

odkod sledi, da sta v i_1 stolpci in imata iste predhodnike, torej tudi prvi element vrstice m. Od tod sledi, da se nahajata na istem mestu v tabeli, saj so si števila, ki nimajo Fibonaccijevega predhodnika, v naraščajočem vrstnem redu...

Izrek 4 *Naj bosta a_1, $a_2 \in \mathbb{N}$. Definirajmo zaporedje (a_n) z Fibonacijevo rekurzivno zvezo $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ za vsak $n \geq 1$. Potem obstajajo taka števila $k, l, m \in \mathbb{N}$, da velja*

$$a_{m+n} = T_{k,l+n} \text{ za vsak } n \geq 0.$$

(Izrek pove to, da se od neke vrednosti naprej v tabeli pojavi zaporedje, za katero velja Fibonaccijeva rekurzivna zveza.)

Dokaz: Zadostuje pokazati, da obstaja $n \in \mathbb{N}$, za kateregа velja

$$a_{n+1} = \sigma(a_n).$$

Splošni člen Fibonaccijevega zaporedja lahko zapišemo v obliki

$$a_n = A\alpha^n + B\beta^n$$

za neki konstanti A in B ter vrednosti $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Ker je $|\beta| < 1$, hitro vidimo, da za dovolj veliki n velja $a_{n+1} = \rho(a_n)$ oziroma a_{n+1} je najbližje naravno število številu $a_n\alpha$. Želimo doseči, da je $a_{n+1} = \sigma(a_n)$, zato potrebujemo tak a_n,da je $\rho(a_n) = \sigma(a_n)$. Po prejšnjem izreku moramo poiskati tak a_n, da bo sam Fibonaccijev naslednik.

Recimo, da a_n ni Fibonaccijev naslednik. Potem je oblike

$$a_n = F_1 + F_k + ...,$$

kjer je $k \geq 3$. Potem velja po prejšnjem izreku, da je

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \rho(a_n) = \sigma(a_n) - 1 = F_2 + F_{k+1} + ... - 1 = \\ &= (F_2 - 1) + F_{k+1} + ... = F_1 + F_{k+1} + ..., \end{aligned}$$

kar pomeni, da a_{n+1} ni Fibonaccijev naslednik.Za naslednji člen zaporedja (a_n) pa lahko trdimo

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= a_n + a_{n+1} = (F_1 + F_k + ...) + (F_1 + F_{k+1} + ...) = \\ &= F_2 + F_{k+2} + ..., \end{aligned}$$

kar pomeni, da je a_{n+2} Fibonaccijev naslednik.

Opomba:

Naj bo r_n nanmanjše število vrstice v tabeli, ki vsebuje naravno število n. ($T_{0,0}$...element v vrstici 0 in stolpcu 0). Vidimo, da se števila $0, 1, 2, 3$ prvič pojavijo v vrstici 0, število 4 v vrstici $1, ...$),kar poda zaporedje

$$(r_n) = (0, 0, 0, 1, 0, 2, 1, 0, 3, 2, 1, 4, 0, 5, 3, 2, 6, 1, 7, 4, 0, ...)$$

Definirajmo podzaporedje $(f_i)_{i=0}^{\infty}$, za katerega velja f_i je razlika indeksov zaporednih ničelnih členov zaporedja r_i.

Opazimo, da je

$$\begin{aligned} f_0 &= ind(r_2) - ind(r_1) = 2 - 1 = 1 \\ f_1 &= ind(r_3) - ind(r_2) = 3 - 2 = 1 \\ f_2 &= ind(r_5) - ind(r_3) = 5 - 3 = 2 \\ f_3 &= ind(r_8) - ind(r_5) = 8 - 5 = 3 \\ f_4 &= ind(r_{13}) - ind(r_8) = 13 - 8 = 5 \\ f_5 &= ind(r_{21}) - ind(r_{13}) = 21 - 13 = 8 \\ & ... \end{aligned}$$

Razlika indeksov zaporednih ničelnih členov oblikuje Fibonaccijevo zaporedje: $F_n = f_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}_0$.

Števila, ki se nahajajo kot neničelni členi zaporedja r_n med dvema zaporednima ničelnima členoma