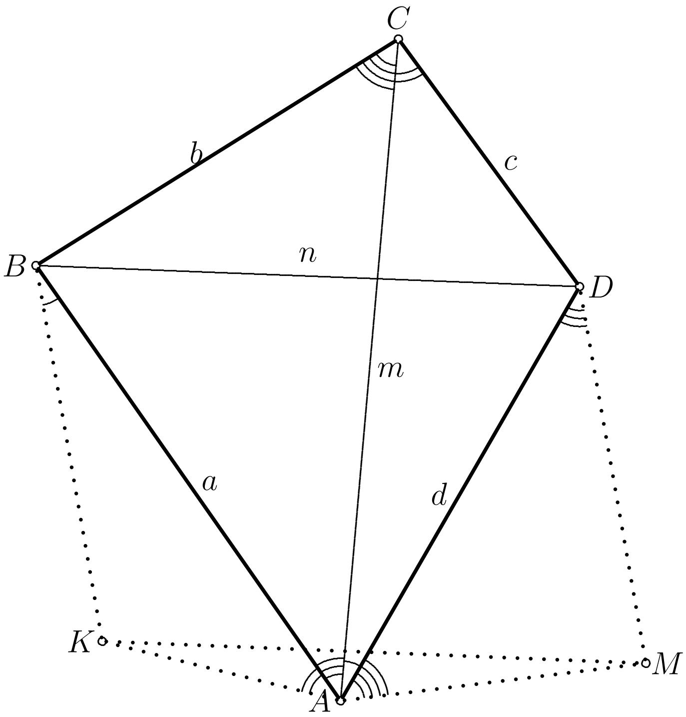
Bretschneiderjev izrek

Izrek *V konveksnem štirikotniku s stranicami a, b, c, in d velja*

$$m^2n^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos(\alpha+\gamma),$$

kjer sta m in n diagonali v štirikotniku, α in γ pa par notranjih kotov.

(Tej trditvi pravijo tudi kosinusni izrek za štirikotnik).



Dokaz:

V zunanjosti štirikotnika določimo točki K in M, da veljata podobnosti

$$\triangle AKB \sim \triangle CDA$$
$$\triangle AMD \sim \triangle CBA$$

(glej sliko). Velja skladnost kotov

$$\angle BAK = \angle DCA,$$
$$\angle ABK = \angle CAD$$

ter

$$\angle DAM = \angle BCA,$$
$$\angle ADM = \angle CAB.$$

Zaradi podobnosti veljajo enakosti

$$\frac{|AM|}{d} = \frac{b}{m}, \frac{|AK|}{a} = \frac{c}{m}, \frac{|KB|}{a} = \frac{d}{m}, \frac{|DM|}{d} = \frac{a}{m}.$$

Sledi

$$|KB| = |DM|.$$

Pokažimo v dveh točkah, da je *štirikotnik $KMDB$ paralelogram*:

1. *par nasprotnih stranic v 4-kotniku je skladen.*

   To velja, saj je $|KB| = |DM|$.

2. *vsota sosednjih notranjih kotov v 4-kotniku je* 180°.

   $\angle KBD + \angle BDM = (\angle CAD + \angle ABD) + (\angle BDA + \angle CAB) = 180^\circ.$

   Zadnji enačaj velja zaradi vsote notranjih kotov v trikotniku.

Ker je $KMDB$ paralelogram, je $n = |KM|$. Uporabimo kosinusni izrek v trikotniku $\triangle AMB$:

$$\begin{aligned} |KM|^2 &= |AK|^2 + |AM|^2 - 2|AK| \cdot |AM| \cos(\measuredangle KAM) \\ n^2 &= \left(\frac{ac}{m}\right)^2 + \left(\frac{bd}{m}\right)^2 - 2\left(\frac{ac}{m}\right)\left(\frac{bd}{m}\right)\cos(\alpha+\gamma). \end{aligned}$$

Pomnožimo z m^2 in dobimo

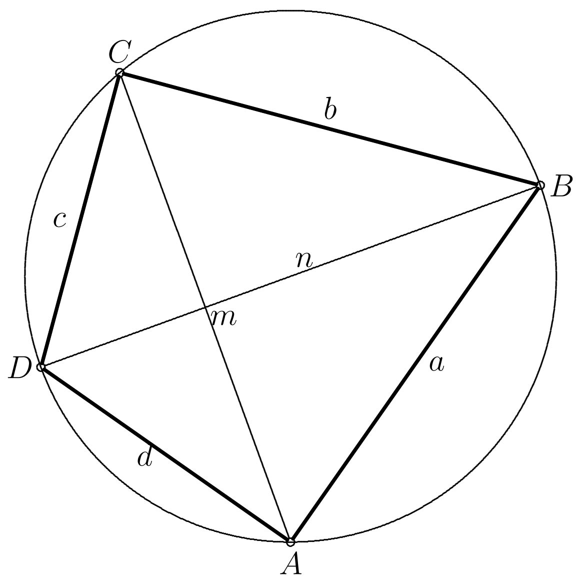
$$m^2 n^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos(\alpha+\gamma) \tag{1}$$

□

Posledica 1 [Ptolomejev izrek] *V tetivnem štirikotniku s stranicami $a, b, c,$ in d velja*

$$mn = ac + bd,$$

kjer sta m in n diagonali v štirikotniku.



Dokaz:

Ptolomejev izrek je le poseben primer Bretschneiderjevega izreka, saj v tetivnem 4-kotniku velja

$$\alpha + \gamma = 180°.$$

Če to upoštevamo v (**??**), sledi

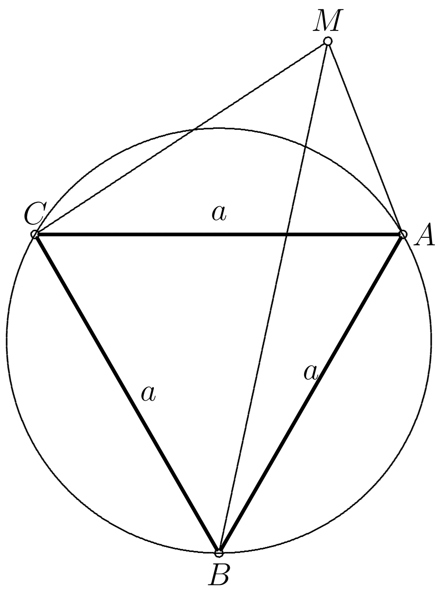
$$mn = ac + bd.$$

□

Posledica 2 [Pompeiujev izrek] *Naj bo $\triangle ABC$ enakostranični trikotnik in M točka v ravnini, ki ne leži na krožnici, očrtani trikotniku $\triangle ABC$. Potem obstaja trikotnik s stranicami enakimi $|MA|, |MB|, |MC|$.*

Dokaz:

Recimo, da je točka B najbolj oddaljena od M izmed vseh oglišč trikotnika.



Po Bretschneiderjevem izreku velja

$$|MB|^2 \cdot a^2 = a^2|CM|^2 + a^2|AM|^2 - 2a^2|CM| \cdot |AM| \cdot \cos(\measuredangle CMA + 60°).$$

Krajšamo s faktorjem a^2:

$$|MB|^2 = |CM|^2 + |AM|^2 - 2|CM| \cdot |AM| \cdot \cos(\measuredangle CMA + 60°).$$

Sledi $|MB|^2 = (|CM| + |AM|)^2 - 2|CM| \cdot |AM|(1 + \cos(\measuredangle CMA + 60°))$

Ker M ne leži na očrtani krožnici, velja $\measuredangle CMA \neq 120°$ (izrek o središčnem in obodnem kotu), kar pomeni, da je faktor $\cos(\measuredangle CMA + 60°) \neq -1$, zato je $(1 + \cos(\measuredangle CMA + 60°)) > 0$.

Od tod je $|MB| < |AM| + |CM|$. $\square$