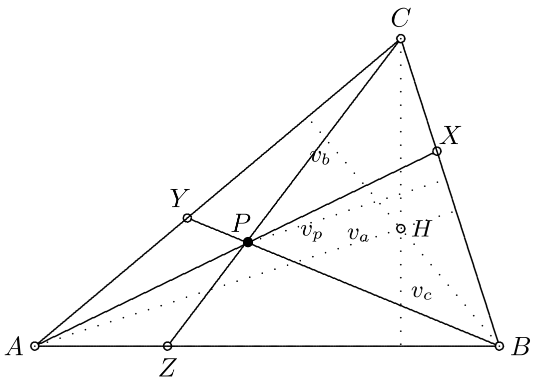
Cevov izrek *(Giovanni Cevo, 1678)*

Izrek 1 *Podan je trikotnik $\triangle ABC$. Na stranicah BC, CA, AB izberemo točke X, Y, Z. Daljice AX, BY, CZ se sekajo v skupni točki (so konkurentne) natanko tedaj, ko velja:*

$$\frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} \cdot \frac{|AZ|}{|ZB|} = 1.$$

Dokaz:



($\Rightarrow$) Predpostavimo, da se daljice AX, BY, CZ se sekajo v točki P. Potem velja

$$\frac{|BX|}{|XC|} = \frac{|BX| \cdot v_a}{|XC| \cdot v_a} = \frac{p(\triangle ABX)}{p(\triangle AXC)}$$

$$\frac{|BX|}{|XC|} = \frac{|BX| \cdot v_p}{|XC| \cdot v_p} = \frac{p(\triangle BXP)}{p(\triangle CXP)}$$

Upoštevajoč ([1]) velja

$$\frac{|BX|}{|XC|} = \frac{p(\triangle ABX) - p(\triangle BXP)}{p(\triangle AXC) - p(\triangle CXP)} = \frac{p(\triangle ABP)}{\triangle APC)}.$$

Podobno velja

$$\frac{|CY|}{|YA|} = \frac{p(\triangle BCP)}{p(\triangle ABP)}, \qquad \frac{|AZ|}{|ZB|} = \frac{p(\triangle APC)}{p(\triangle BCP)}.$$

Zmnožimo

$$\frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} \cdot \frac{|AZ|}{|ZB|} = \frac{p(\triangle ABP)}{p(\triangle APC)} \cdot \frac{p(\triangle BCP)}{p(\triangle ABP)} \cdot \frac{p(\triangle APC)}{p(\triangle BCP)} = 1$$

[1]Premislimo: če za realna števila a, b, c, d, kjer sta $b, d \neq 0$, velja $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$, sledi

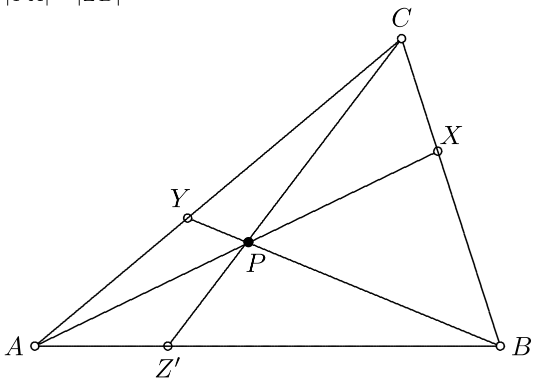
$$\frac{a-c}{b-d} = \frac{kb-kd}{b-d} = k.$$

Sledi

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$$

($\Leftarrow$) Predpostavimo, da velja $\frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} \cdot \frac{|AZ|}{|ZB|} = 1$.

Recimo, da se $|AX|$ in $|BY|$ sekata v točki P. Pokazati je potrebno konkurentnost daljic AX, BY, CZ, torej da tudi daljica $|CZ|$ poteka skozi P. Potegnimo premico skozi C in P. Ta seka stranico AB v točki Z'.



Ker so AX, BY, CZ' konkurentne daljice, velja $\frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} \cdot \frac{|AZ'|}{|Z'B|} = 1$. Odtod sledi

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} = \frac{|AZ'|}{|Z'B|} = k.$$

Torej je

$$|AZ| = k|ZB|, \quad |AZ'| = k|Z'B|.$$

Velja

$$|AB| = |AZ| + |ZB| = k|ZB| + |ZB| = (k+1)|ZB|$$

in

$$|AB| = |AZ'| + |Z'B| = k|Z'B| + |Z'B| = (k+1)|Z'B|.$$

Sledi

$$Z' = Z.$$

$\square$

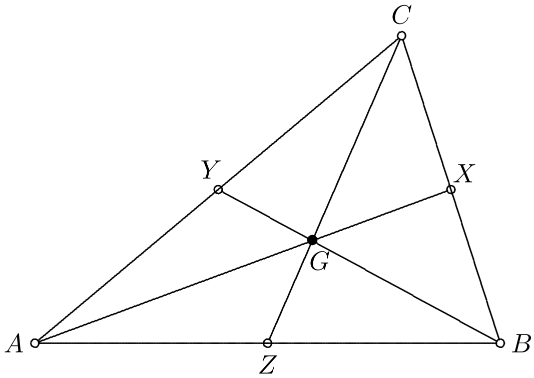
Posledica 1 *Težiščnice trikotnika se sekajo v skupni točki, ki jo imenujemo težišče trikotnika (oznaka G).*

Dokaz:

Točke X, Y in Z razpolavljajo stranice.

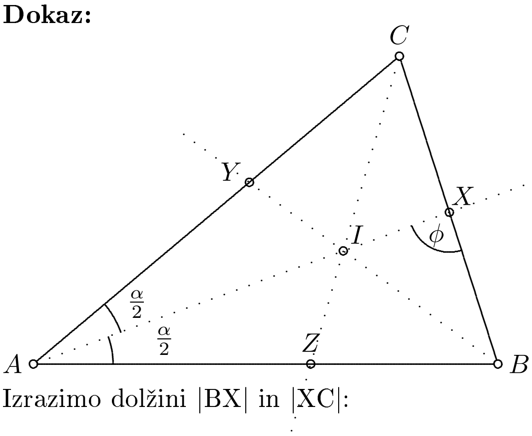
$$\frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} \cdot \frac{|AZ|}{|ZB|} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}} \cdot \frac{\frac{b}{2}}{\frac{b}{2}} \cdot \frac{\frac{c}{2}}{\frac{c}{2}} = 1.$$

Po Cevovem izreku so daljice konkurentne. $\square$



Posledica 2 *Simetrale kotov trikotnika se sekajo v isti točki (oznaka I).*

Dokaz:



Po sinusnem izreku v trikotnikih $\triangle ABX$ in $\triangle AXC$ velja:

$$\frac{|BX|}{\sin(\alpha/2)} = \frac{c}{\sin\phi},$$

$$\frac{|CX|}{\sin(\alpha/2)} = \frac{b}{\sin(180^\circ - \phi)} = \frac{b}{\sin\phi}.$$

Izrazimo dolžini |BX| in |XC|:

$$|BX| = \frac{c \cdot \sin(\alpha/2)}{\sin\phi},$$

$$|XC| = \frac{b \cdot \sin(\alpha/2)}{\sin\phi},$$

odkod sledi

$$\frac{|BX|}{|XC|} = \frac{c}{b}.$$

Podobno sklepamo za ostala dva para dolžin:

$$\frac{|CY|}{|YA|} = \frac{a}{c}, \qquad \frac{|AZ|}{|ZB|} = \frac{b}{a}.$$

S Cevovim izrekom preverimo konkurentnost

$$\frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} \cdot \frac{|AZ|}{|ZB|} = \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{a} = 1.$$

Opomba: Ker je točka I enako oddaljena od vseh treh stranic, je točka I središče trikotniku včrtanega kroga.

Posledica 3