Eulerjev izrek

Izrek 1 *Naj bo trikotniku* $\triangle ABC$*:*
R *... polmer trikotniku očrtanega kroga,*
r *... polmer trikotniku včrtanega kroga,*
I *... središče trikotniku včrtanega kroga,*
O *... središče trikotniku očrtanega kroga. Potem velja:*

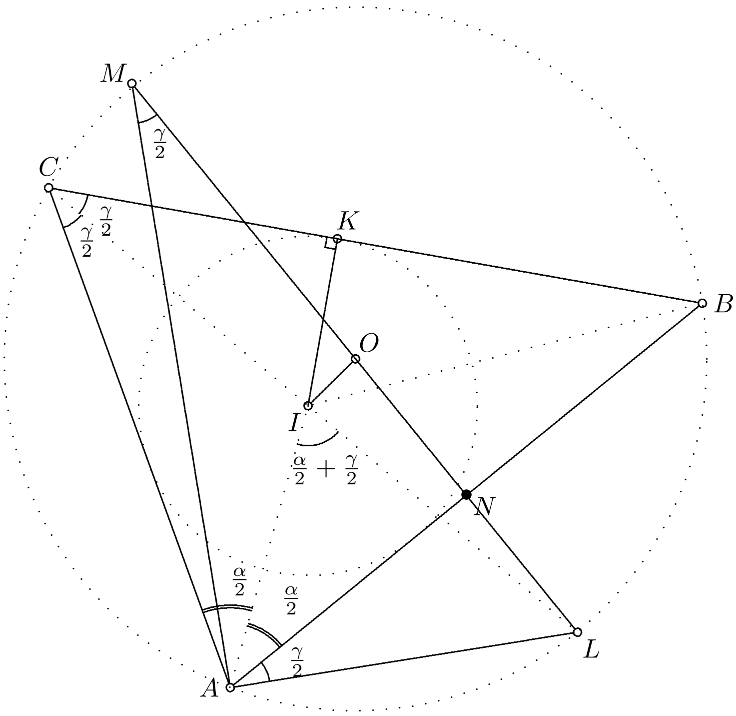
$$|IO|^2 = R^2 - 2Rr.$$

Dokaz:
Potenca točke I glede na očrtano krožnico je

$$|IO|^2 - R^2 = (IC)(IL).$$

Ker je točka I znotraj krožnice, je potenca negativna, torej je ena izmed vrednosti $(IC), (IL)$ negativna. Sledi $|IO|^2 - R^2 = -|IC| \cdot |IL|$ in

$$|IO|^2 = R^2 - |IC| \cdot |IL|.$$



Ker sta $\measuredangle BAL$ in $\measuredangle BCL$ obodna kota nad lokom $\widehat{LB}$, sta skladna. Trikotnik $\triangle AIL$ je enakokrak; L je razpolovišče $\widehat{AB}$, tudi simetrala stranice razpolavlja $\widehat{AB}$ in poteka skozi L.
Opazimo še lahko podobnost med trikotnikomi $\triangle ALN, \triangle MLA$ ter $\triangle CIK$; vsi

so namreč pravokotni z enim ostrim kotom, enakim $\gamma/2$. V trikotniku $\triangle ALM$ velja

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{|AL|}{2R},$$

v trikotniku $\triangle IKC$ pa

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{|IC|}.$$

Ker je

$$|IL| = |AL| = 2R\sin(\gamma/2)$$

in

$$|IC| = \frac{r}{\sin(\gamma/2)},$$

sledi

$$|IO|^2 = R^2 - \frac{r}{\sin\frac{\gamma}{2}} \cdot 2R\sin\frac{\gamma}{2} = R^2 - 2Rr.$$

$\square$

Posledica 1 *V trikotniku velja:*

(i) $R \geq 2r$,

(ii) $R = 2r$ *natanko tedaj, ko je trikotnik enakostaničen.*

Dokaz:

(i) V poljubnem trikotniku je $|IO| \geq 0$, torej je $R^2 - 2Rr \geq 0$. Sledi

$$R(R-2r) \geq 0.$$

Ker je R pozitivno število, mora biti $R - 2r \geq 0$. (ii)