

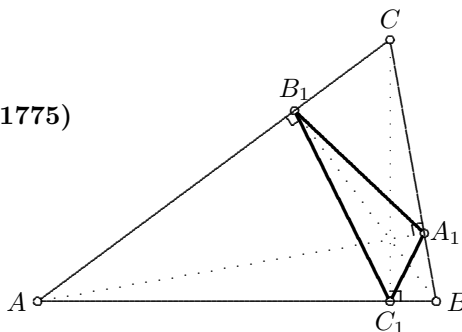
FAGNANANOV PROBLEM

**Fagnanov problem:**

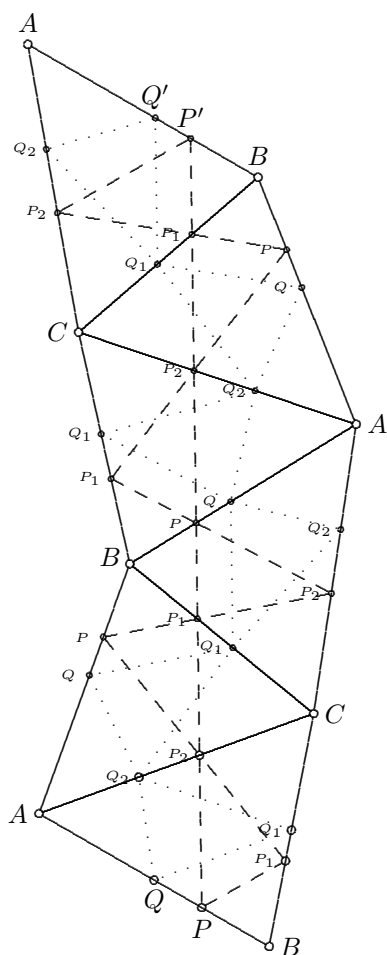
Izmed vseh včrtanih trikotnikov poljubnemu trikotniku najdi tistega z najmanjšim obsegom.

**Izrek 1 (Fagnanov problem, 1775)**

Med trikotniki, ki so včrtani trikotniku  $ABC$ , ima najmanjši obseg nožiščni trikotnik.



**Dokaz:**



Izberimo si trikotnik  $\triangle ABC$  in vanj včrtajmo nožiščni trikotnik  $\triangle PP_1P_2$  in nek drug poljuben vrtani trikotnik  $\triangle QQ_1Q_2$ . Prezrcalimo sedaj trikotnik  $\triangle ABC$  zaporedoma na naslednji način:

$$Z_{BC} \circ Z_{AC} \circ Z_{AB} \circ Z_{BC} \circ Z_{AC}(\triangle ABC).$$

Ker je kompozitum zrcaljenj zrcaljenje, dobimo na koncu trikotnik  $\triangle ABC$ , še več; stranici  $AB$  sta vzporedni:

$$n(P, Q) \parallel n(P', Q')$$

(stranico  $AB$  smo zavrteli za kot  $2\alpha$  v pozitivni smeri, potem za  $2\beta$  v pozitivni smeri, naslednja rotacija je za kot  $2\alpha$  v negativni smeri in na koncu še za  $2\beta$  v negativni smeri). Ker se razdalje ohranjajo, je

$$|PQ| = |P'Q'|.$$

Štirikotnik  $PP'Q'Q$  je zato paralelogram. Dolžina  $PP'$  je enaka dvakratnemu obsegu nožiščnega trikotnika  $\triangle PP_1P_2$ , medtem ko je dolžina lomljenke enaka dvakratnemu obsegu trikotnika  $\triangle QQ_1Q_2$ .

Ker je dolžina lomljenke daljša od stranice paralelograma  $—QQ'—$ , je

$$o_{\Delta PP_1P_2} \leq o_{\Delta QQ_1Q_2}. \quad \square$$