## Bramaguptova in Heronova formula

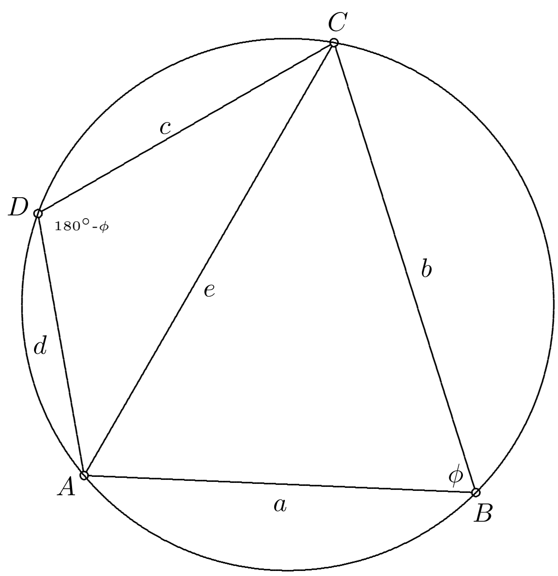
**Izrek 1 (Bramagupta, Indija, 7. stoletje)** *Naj bo $ABCD$ tetivni štirikotnik s stranicami $a, b, c, d$. Naj bo $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ in $K$ ploščina štirikotnika. Tedaj velja*

$$K^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d).$$

**Dokaz:**

Zapišimo kosinusni izrek za dolžino diagonale $e$ v trikotnikih $\triangle ABC$ in $\triangle ACD$

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\phi, \qquad e^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos(180^\circ - \phi).$$




Upoštevajoč, da je $\cos\phi = -\cos(180^\circ - \phi)$, enačbi odštejemo ter preuredimo na način

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2(ab + cd)\cos\phi \tag{1}$$

Ploščino tetivnega štirikotnika zapišemo kot vsoto obeh trikotnikov

$$K = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}ab\sin\phi + \frac{1}{2}cd\sin(180^\circ - \phi).$$

Upoštevajoč, da je $\sin\phi = \sin(180^\circ - \phi)$ pomnožimo izraženo ploščino s 4

$$4K = 2(ab + cd)\sin\phi$$

ter kvadriramo

$$16K^2 = 4(ab + cd)^2\sin^2\phi. \tag{2}$$

Kvadrat (1 in (2) seštejemo

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 + 16K^2 = 4(ab + cd)^2.$$

Izrazimo $16K^2$; sledi

$$\begin{aligned}
16K^2 &= 4(ab+cd)^2 - (a^2+b^2-c^2-d^2)^2 \\
&= ((2ab+2cd)+(a^2+b^2-c^2-d^2)) \cdot ((2ab+2cd)-a^2-b^2+c^2+d^2) \\
&= ((a+b)^2-(c-d)^2) \cdot ((c+d)^2-(a-b)^2) \\
&= (a+b+c-d)(a+b-c+d)(c+d+a-b)(c+d-a+b) \\
&= (2s-2d)(2s-2c)(2s-2b)(2s-2a)
\end{aligned}$$

Korenimo

$$K^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$$

□

**Opomba:** Opazimo lahko, da v primeru, ko za točki $C$ in $D$ velja

$$C \to D,$$

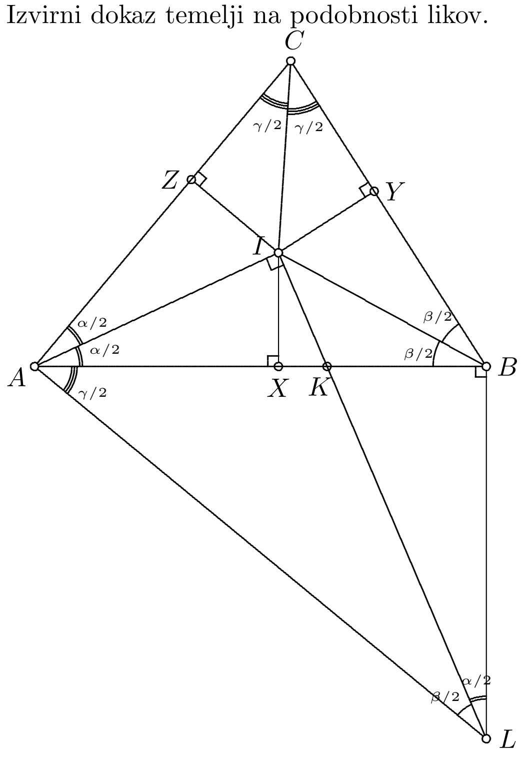
gre dolžina stranice $d$ proti 0. S tem razmislekom pridemo do časovno starejše Heronove formule.

**Izrek 2 (Heron, okoli 60 n.št.)** *V trikotniku $\triangle ABC$ s stranicami $a, b$ in $c$ je ploščina $K$ enaka*

$$K^2 = s(s-a)(s-b)(s-c),$$

*kjer je $s = \frac{a+b+c}{2}$.*

**Dokaz:**
Izvirni dokaz temelji na podobnosti likov.




V trikotniku $\triangle ABC$ izberemo točko $L$ tsko da je nosilka skozi točki $B$ in $L$ pravokotna na nosilko skozi točki $I$ in $L$.
Opazimo, da je štirikotnik $AIBL$ tetivni; $\triangle AIL$ je namreč pravokoten, prav tako je pravokoten $\triangle ABL$, torej sta točki $I$ in $B$ ležita na krožnici s premerom $AL$ in središčem na razpolovišču $AL$. Kote znotraj tetivnega štirikotnika eksplicitno izračunamo:

$$\begin{aligned}
\measuredangle ALB &= 180^\circ - \measuredangle AIB = \frac{\alpha+\beta}{2}, \\
\measuredangle BAL &= 90^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\gamma}{2}
\end{aligned}$$

Trikotnika $\triangle ABL$ in $\triangle CYI$ sta si podobna, saj sta pravokotna z ostrim kotom $\gamma/2$. Velja

$$\frac{|AB|}{|CY|} = \frac{|BL|}{|IY|} = \frac{|BL|}{|IX|} = \frac{|KB|}{|KX|}$$

Upoštevajoč prvi in zadnji količnik opazimo ,da sta trikotnika $\triangle ABL$ in $\triangle CXI$ podobna. Sledi

$$\begin{aligned} \frac{|AB|}{|CY|} + 1 &= \frac{|KB|}{|KX|} + 1 \\ \frac{|AB| + |CY|}{|CY|} &= \frac{|KB| + |KX|}{|KX|} \end{aligned} \tag{3}$$

Dolžini $|AX|$ in $|CY|$ izrazimo s stranicami trikotnika $\triangle ABC$; točke $X, Y$ in $Z$ so dotikališča včrtane krožnice s stranicami trikotnika. Opazimo, da je

$$|CY| = |CZ| = y, |BX| = |BY| = x, |AZ| = |AX| = z.$$

Sledi, da je $x + y + z = s$, izrazimo —CY— in —AX—:

$$|CY| = y = s - (x + z) = s - c,$$

$$|AX| = z = s - (x + y) = s - a.$$

Po Evklidovem izreku v $\triangle AKI$ velja:$|KX| \cdot |AX| = r^2$, kar pomeni

$$|KX| = \frac{r^2}{s - a}.$$

Vstavimo v (3) in upoštevajmo $|KB| + |KX| = s - b$

$$\frac{c + (s - c)}{s - c} = \frac{(s - b)(s - a)}{r^2}$$

Razširimo prvi ulomek z $s$:

$$\frac{s^2}{s(s - c)} = \frac{(s - b)(s - a)}{r^2},$$

kar nam da enakost

$$s^2 \cdot r^2 = s(s - a)(s - b)(s - c) = K^2$$

□