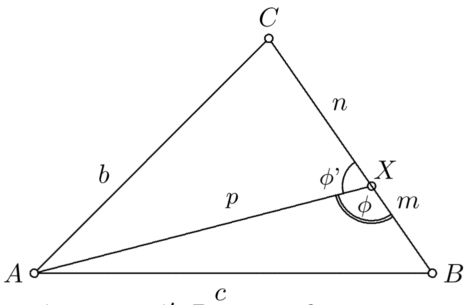
STEWARTOV IZREK *(Stewart, 1746)*

Izrek 1 *Naj v trikotniku $\triangle ABC$ točka X leži na stranici a in naj bo $|AX| = p$, $|BX| = m$ in $|CX| = n$. Tedaj velja*

$$a(p^2 + mn) = b^2 m + c^2 n.$$

Dokaz:

V trikotnikih $\triangle ABX$ in $\triangle AXC$ velja kosinusni izrek:
$c^2 = p^2 + m^2 - 2 \cdot p \cdot m \cdot \cos\phi$
$b^2 = p^2 + n^2 - 2 \cdot p \cdot n \cdot \cos\phi'$.



Očitno je $\phi' = 180° - \phi$, zato je $\cos\phi = -\cos\phi'$. Prvo enačbo pomnožimo z n, drugo pa z m, ju seštejemo ter dobimo

$$\begin{aligned} c^2 n + b^2 m &= p^2(m+n) + m^2 n + n^2 m \\ &= p^2 a + amn \qquad \square \end{aligned}$$

Opomba: Stewartov izrek dejansko določi dolžino Cevove daljice v trikotniku, če je znano razmerje, v katerem krajišče Cevove daljice deli nasprotno stranico.

Posledica 1 *V trikotniku $\triangle ABC$ se dolžine težiščnic izražajo s stranicami na naslednji način:*

$$\begin{aligned} t_a &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} \\ t_b &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2} \\ t_c &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}. \end{aligned}$$

Dokaz:
Dokažimo le za t_a, za ostali dve težiščnici pokažemo analogno.
Uporabimo Stewartov izrek, kjer točka X leži na razpolovišču stranice a.
Velja $p = t_a, m = n = \frac{a}{2}$, odtod pa sledi

$$a \cdot (t_a^2 + \tfrac{a^2}{4}) = b^2 \tfrac{a}{2} + c^2 \tfrac{a}{2}.$$

Delimo z a, preuredimo enakost ter izrazimo t_a :

$$t_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) \Rightarrow t_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$