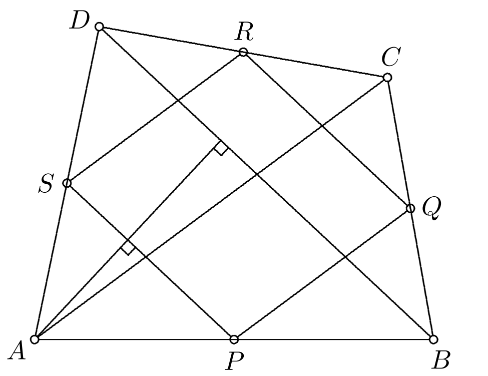
Verignonov izrek

Izrek 1 (Pierre Verignon, 1731) *Naj bo $ABCD$ konveksni štirikotnik. Razpolovišča zaporednih stranic tvorijo paralelogram, katerega ploščina je enaka polovici ploščine štirikotnika.*

Dokaz:
Naj bodo razpolovišča štirikotnika točke P, Q, R, S. Pokažimo, da je

$$p(PQRS) = p(ABCD).$$



V trikotniku $\triangle ABC$ je

$$PQ \parallel |AC|, \qquad |PQ| = \frac{1}{2}|AC|,$$

v trikotniku $\triangle ACD$ pa

$$RS \parallel |AC| \qquad |RS| = \frac{1}{2}|AC|.$$

Ploščino štirikotnika $PQRS$ izrazimo kot

$$p(PQRS) = p(ABCD) - p(APS) - p(PBQ) - p(QCR) - p(RDS).$$

Opazimo tudi, da je $v_{\triangle APS} = \frac{1}{2} v_{\triangle ABD}$. Ker je $|PS| = \frac{1}{2}|BD|$, sledi da je $p(APS) = \frac{1}{4}p(ABD)$. S podobnim sklepom ugotovimo

$$p(PBQ) = \frac{1}{4}p(ABC), \qquad p(QCR) = \frac{1}{4}p(BCD), \qquad p(RDS) = \frac{1}{4}p(ACD),$$

zato je

$$p(PQRS) = p(ABCD) - \frac{1}{4}p(ABD) - \frac{1}{4}p(ABC) - \frac{1}{4}p(BCD) - \frac{1}{4}p(ACD).$$

Ker je $p(ABD) + p(BCD) = p(ABC) + p(ACD) = p(ABCD)$, je

$$\begin{aligned} p(PQRS) &= p(ABCD) - \frac{1}{4}p(ABCD) - \frac{1}{4}p(ABCD) \\ &= \frac{1}{2}p(ABCD) \square \end{aligned}$$

$\square$