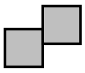
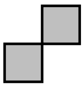
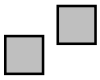
Polinomine

Z imenom *polinomine* označujemo like, ki jih dobimo s sestavljanjem skladnih kvadratov tako, da je presek dveh sosednjih kvadratov skupna stranica. Torej nobena izmed

 ,  oziroma 

ni polinomina.

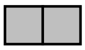
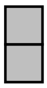
Glede na število kvadratov, ki jih sestavljajo, delimo polinomine na *monomine* (sestavlja jih po 1 kvadrat), *domine* (2 kvadrata), *trinomine* (3 kvadrati), *tetromine* (4 kvadrati), *pentomine* (5 kvadratov), *heksomine* (6 kvadratov) itn.

Za te like so se matematiki začeli posebej zanimati v začetku druge polovice preteklega stoletja, zlasti po letu 1957, ko se je o njih razpisal Martin Gardner v *Scientific American*.

Očitno je, da obstaja ena sama monomina oziroma da je vsaka monomina oblike

 .

Prav tako obstaja ena sama domina, saj predstavljata sliki

 in 

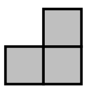
isti lik, le da je na eni izmed slik zasukan za 90°. Kljub temu si v zvezi z domino lahko zastavimo nalogo:

Na katerega od naštetih pravokotnikov razsežnosti $m \times n$ ni mogoče popolnoma in brez prekrivanja položiti celega števila domin?

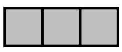
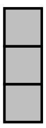
(A) 3×4 **(B)** 3×5 **(C)** 4×4 **(D)** 4×5 **(E)** 6×3

Pravilni odgovor je seveda (**B**), saj je med naštetimi pravokotniki edini, ki ga sestavlja liho število enotskih kvadratov.

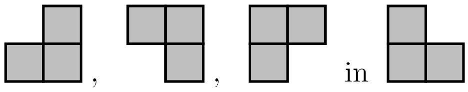
Obstajata dve trinomini, in sicer

 in  .

Sliki

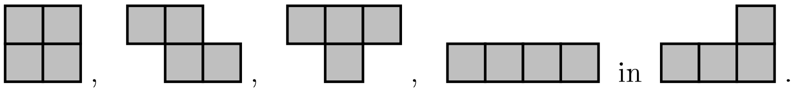
 in 

predstavljata isto trinomino, prav tako je na slikah

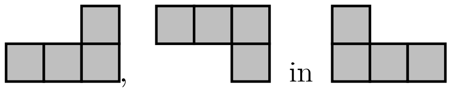


ista trinomina.

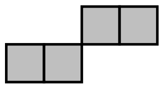
Različnih tetromin je pet, to so



Opozorimo še, da tetromine



niso med seboj različne, saj lahko s premikom, zrcaljenjem ali vrtenjem katerekoli izmed njih pokrijemo drugi dve. Lika

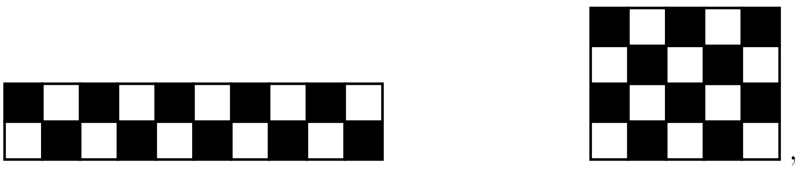


ne štejemo med tetromine, saj imata srednja kvadrata skupno le oglišče. (Gotovo te tetromine spominjajo na popularno računalniško igrico tetris.)

Poskusimo zdaj rešiti naslednjo nalogo:

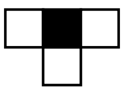
Zgled 1. *Ali je mogoče iz 5 različnih tetromin oblikovati pravokotnik? Če ni, zakaj ne? (Nasvet: pravokotnik in tetromine pobarvaj kot šahovnico.)*

Rešitev. Tetromine so sestavljene iz po 4 kvadratov. Različnih je 5. Skupaj jih torej sestavlja 20 kvadratov. Možna pravokotnika sta zato 10×2 in 5×4. Upoštevajmo nasvet in v njih izmenično pobarvajmo kvadratke



pa vidimo, da je v obeh enako mnogo belih kot črnih kvadratkov. Tako se zgodi tudi pri tetrominah

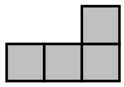
le pri tetromini



so trije kvadratki enake barve, eden pa drugačne. Skupno je torej 11 kvadratkov ene barve in 9 kvadratkov druge barve. Zato iz vseh 5 različnih tetromin ni mogoče sestaviti pravokotnika.

Tudi na tekmovanju *Evropski matematični kenguru* so se že pojavljale naloge v zvezi s polinominami, npr.:

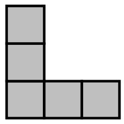
Zgled 2. *Iz tetromin, imenovanih L (glej sliko), sestavljamo pravokotnike. Katerega od naštetih pravokotnikov razsežnosti $m \times n$ ni mogoče sestaviti?*



(**A**) 4×4 (**B**) 6×6 (**C**) 8×8 (**D**) 4×6 (**E**) 6×8

Rešitev. Pravilni odgovor je (**B**). Iz dveh **L**-tetromin lahko sestavimo pravokotnik razsežnosti 4×2. Le-tega sestavlja 8 enotskih kvadratov. Vse naštete pravokotnike, razen pravokotnika **B**, pa sestavlja nek večkratnik števila 8 enotskih kvadratov.

Zgled 3. *Največ koliko pentomin, imenovanih V (glej sliko), lahko položimo na kvadrat velikosti 5×5, ne da bi se med seboj prekrivale?*

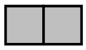
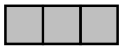
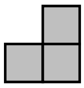


(**A**) *2* (**B**) *3* (**C**) *4* (**D**) *5* (**E**) *6*

Rešitev. Pravilni odgovor je (**C**). Ker je kvadrat sestavljen iz 25 kvadratkov, nanj ne moremo položiti več kot $25 : 5 = 5$ pentomin. Hitro uvidimo, da ni možno hkrati pokriti vseh 4 oglišč kvadrata, zato 5 pentomin nanj ne moremo položiti. Kako je to možno storiti s štirimi, razišči sam.

Obseg polinomin

Zanimivo je tudi raziskati, kako se spreminja obseg polinomin. Izpolni naslednjo preglednico (predpostavi, da je dolžina stranice kvadrata 1 (enota)):

polinomina	njen obseg	
monomina		
domina		
trinomina		 in 

Se ti zdi, da si odkril-a kakšno pravilo? Ali sedaj lahko napoveš, kolikšen je obseg tetromin?

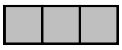
polinomina	njen obseg
tetromina	

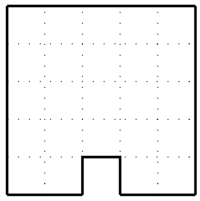
Je bila napoved pravilna? Si predvidel-a dve različni vrednosti obsega? Sklep je včasih preuranjen. Odvisnost se pogosto spremeni od tiste, ki se pojavi na začetku.

Sestavi novo preglednico in ugotovi najmanjši in največji obseg. Nato v isti koordinatni ravnini nariši točke, ki pripadajo urejenim parom (polinomina, najmanjši obseg) z eno barvo, točke, ki pripadajo urejenim parom (polinomina, največji obseg) pa z drugo barvo.

polinomina	najmanjši obseg	največji obseg
monomina		
domina		
trinomina		
tetromina		
pentomina		
heksomina		

Naloge

1. Ali je mogoče s trinominami  brez prekrivanja in vrzeli pokriti lik na desni? (Nasvet: V trinomini pobarvaj vsak kvadratek z drugačno barvo. Tudi v liku uporabi enak način barvanja.)



2. Na sliki sta tetromini, imenovani T in Z:

   (a) Iz štirih tetromin T oblikuj kvadrat.

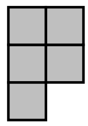
   (b) Uporabi T-je in Z-je in oblikuj pravokotnike razsežnosti 4×5, 4×6, 4×7, 4×8 in 4×9.

   (c) Razloži, zakaj kvadrata razsežnosti 5×5 ne moreš sestaviti iz T-jev in Z-jev.

3. Koliko različnih pentomin obstaja? Uporabi karirast papir in jih nariši.

4. Katere pentomine lahko s pregibanjem po stranicah kvadratov preoblikuješ v škatle brez pokrova? Izreži jih in preveri svoje odgovore.

5. Na voljo imaš mnogo pentomin, imenovanih P (glej sliko).



   (a) Koliko jih porabiš za sestavljanje pravokotnika razsežnosti 5×2?

   (b) Iz njih sestavi pravokotnik razsežnosti 5×4 na tri različne načine (nobenega ne dobiš z zrcaljenjem ali vrtenjem drugega).

   (c) Ali lahko iz samih P-jev sestaviš kvadrat razsežnosti 5×5? Utemelji.

   (d) Kolikšne so razsežnosti najmanjšega kvadrata, ki ga je mogoče sestaviti iz samih P-pentomin? Nariši, kako je to mogoče storiti.

6. Nariši čim več različnih heksomin (vseh je 35). Katere predstavljajo mreže kocke?

Literatura in dodatne informacije:

B. Henry, *Newton Student Notes*, AMT Publishing, Canberra, Australia, 2002.

G. Dolinar, D. Felda, M. Željko, *Evropski matematični kenguru 1996-2001*, DMFA – Založništvo, Ljubljana, 2002.

http://math.rice.edu/~lanius/Lessons/Polys/poly1.html

http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/polyomino.html

http://frey.newcastle.edu.au/OMA/polyomino/p1.html

http://www.xprt.net/~munizao/polycover/

http://www.andrews.edu/~calkins/math/pentos.htm

http://www.geocities.com/alclarke0/PolyPages/Polyominoes.html