Test 3.1 : Vektorji 2. Geometrija v prostoru. Analiza funkcij. $G-2$

Ime in priimek: ______________________________

Naloga 1: $2+4+4+4$ $\rightsquigarrow$ $|a.$ $|b.$ $|c.$ $|d.$ $|$

Podani sta premici p in q z enačbama: $\overrightarrow{r_p} = (0,1,-3) + t(-1,-4,-7)$ in $\overrightarrow{r_q} = (-1,8,3) + u(-2,3,-1)$, kjer sta $p, q \in \mathbb{R}$.

a) Preveri, če leži točka $A(-5,14,1)$ na kateri od premic p, q.

b) Izračunaj presečišče premic p in q.

c) Določi enačbo ravnine, v kateri ležita obe premici.

d) Izračunaj kot med premicama.

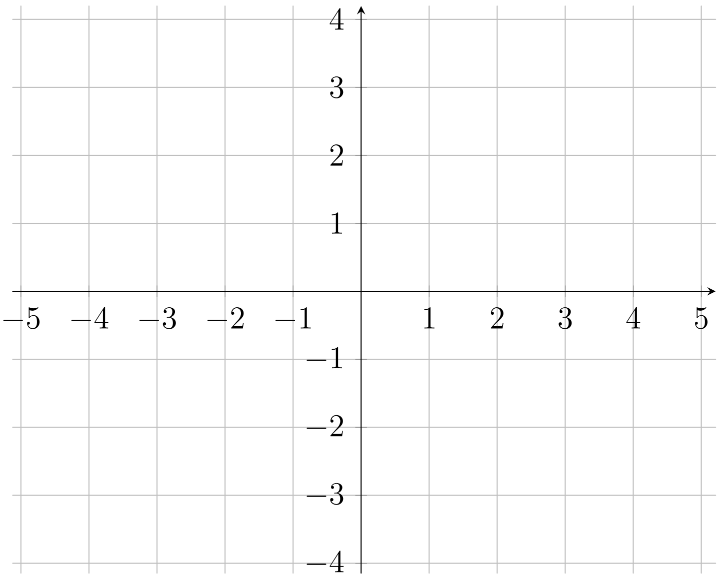
Naloga 2: $(2+2)+(2+2)+(3+1)$ $\rightsquigarrow$ |a. |b. |c. |

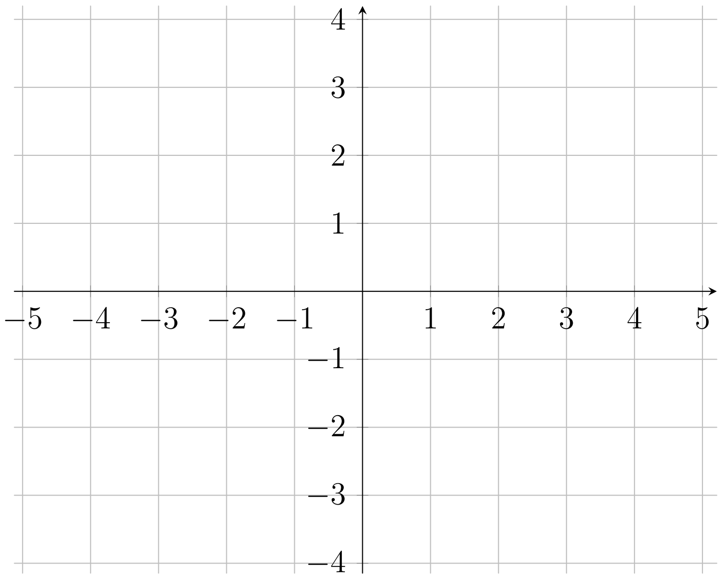
Podana je funkcija $f(x)=\dfrac{1}{2}x-2$.

a) Nariši graf funkcije $f(-x)+2$ in $-f(|x|)$.

b) Nariši grafa funkcij $f(x+4)$ in $|f(x+2)|$.

c) Zapiši inverzno funkcijo funkcije $g(x)=\dfrac{f(x)}{f(x+1)}$ in izračunaj $g^{-1}(4)$.





Naloga 3:	$3+3+1+2+4$	$\rightsquigarrow$ $\|a.$	$\|b.$	$\|c.$	$\|d.$	$\|e.$	$\|$

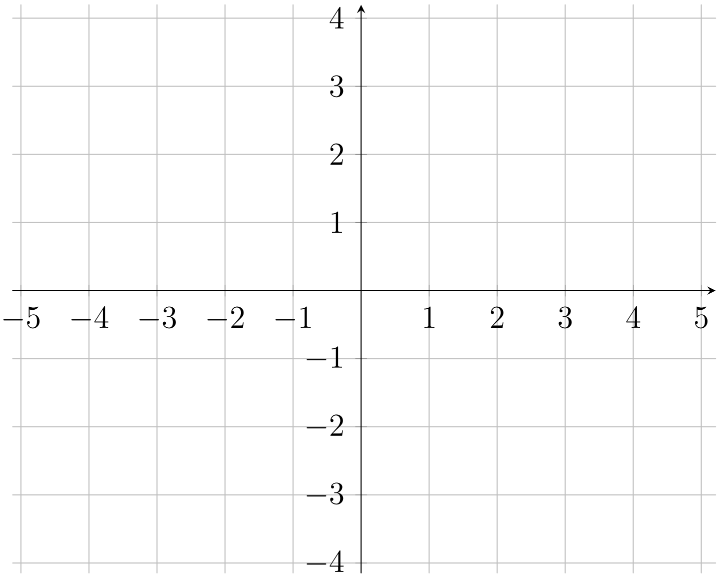
a) Določi definicijsko območje funkcije: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{x^2}, & \text{če } |x|\geq 1\\ 3, & \text{če } |x|<1\end{cases}$ in preveri sodost, lihost funkcije.

b) Izračunaj $A(-2,y)$, $B(1,y)$ in $C(2,y)$, nato pa prezrcali A preko ordinatne osi v A_1, B preko abscisne osi v B_1, C pa preko koordinatnega izhodišča v C_1.

c) Kje je funkcija pozitivna?

d) Določi omejenost funkcije.

e) Nariši graf in določi njeno zalogo vrednosti.



Naloga 4: $3+2+3+3$ $\rightsquigarrow$ |a. |b. |c. |

Podana je družina funkcija $f(x)=\sqrt{x+a}-4$.

a) Za $a=1$ izračunaj ničlo funkcije.

b) Za $a=9$ izračunaj začetno vrednost funkcije.

c) Določi a, da bo funkcija potekala skozi $A(1,-2)$.

d) Dolpči a, da bo definicijsko območje funkcije $[-4,\infty]$.

Število doseženih točk na testu: **število vseh točk na testu:** 50

ocena	1	2	3	4	5	uspešnost v %	**OCENA**
%	$[0,45)$	$[45,60)$	$[60,75)$	$[75,90)$	$[90,100]$		

Naloga 1:

Podani sta premici p in q z enačbama: $\overrightarrow{r_p} = (0, 1, -3) + t(-1, -4, -7)$ in $\overrightarrow{r_q} = (-1, 8, 3) + u(-2, 3, -1)$, kjer sta $t, u \in \mathbb{R}$.

a) Preveri, če leži točka $A(-5, 14, 1)$ na kateri od premic p, q.

Za premico p:

$$(-5, 14, 1) = (0, 1, -3) + t(-1, -4, -7)$$

$$-5 = -t \implies t = 5$$

$$14 = 1 - 4t \implies 13 = -4t \implies t = -\frac{13}{4}$$

Ker t ni enak, točka A ne leži na premici p.

Za premico q:

$$(-5, 14, 1) = (-1, 8, 3) + u(-2, 3, -1)$$

$$-5 = -1 - 2u \implies -4 = -2u \implies u = 2$$

$$14 = 8 + 3u \implies 6 = 3u \implies u = 2$$

$$1 = 3 - u \implies -2 = -u \implies u = 2$$

Ker je $u = 2$ za vse komponente, točka A leži na premici q.

b) Izračunaj presečišče premic p in q.

Poiščemo t in u, da rešimo sistem:

$$(0, 1, -3) + t(-1, -4, -7) = (-1, 8, 3) + u(-2, 3, -1)$$

$$-t = -1 - 2u$$

$$1 - 4t = 8 + 3u$$

$$-3 - 7t = 3 - u$$

Iz prve enačbe: $t = 1 + 2u$ Vstavimo v drugo enačbo:

$$1 - 4(1 + 2u) = 8 + 3u$$

$$1 - 4 - 8u = 8 + 3u$$

$$-3 - 8u = 8 + 3u$$

$$-11 = 11u \implies u = -1$$

$$t = 1 + 2(-1) = -1$$

Preverimo še tretjo enačbo:

$$-3 - 7(-1) = 3 - (-1)$$

$$-3 + 7 = 4$$

$$4 = 4$$

Torej je $t = -1$ in $u = -1$.

Presečišče:

$$(0, 1, -3) - 1(-1, -4, -7) = (1, 5, 4)$$

$$(-1, 8, 3) - 1(-2, 3, -1) = (1, 5, 4)$$

Presečišče je $(1, 5, 4)$.

c) Določi enačbo ravnine, v kateri ležita obe premici.

Normala ravnine je vektorski produkt smeri premic:

$$(-1, -4, -7) \times (-2, 3, -1) = ((-4)(-1) - (-7)(3), (-7)(-2) - (-1)(-1), (-1)(3) - (-4)(-2))$$

$$= (4 + 21, 14 - 1, -3 - 8) = (25, 13, -11)$$

Enačba ravnine:

$$25(x - 1) + 13(y - 5) - 11(z - 4) = 0$$

$$25x - 25 + 13y - 65 - 11z + 44 = 0$$

$$25x + 13y - 11z - 46 = 0$$

d) Izračunaj kot med premicama.

Kot med premicama je kot med njunima smernicama:

$$\cos\theta = \frac{(-1, -4, -7) \cdot (-2, 3, -1)}{\|(-1, -4, -7)\|\|(-2, 3, -1)\|}$$

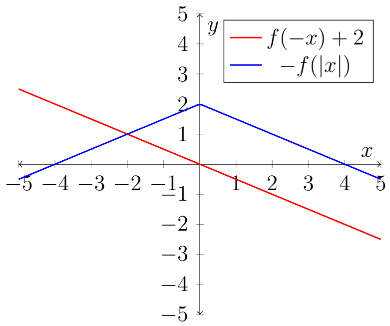
$$= \frac{2 - 12 + 7}{\sqrt{1 + 16 + 49}\sqrt{4 + 9 + 1}} = \frac{-3}{\sqrt{66}\sqrt{14}}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{-3}{\sqrt{66}\sqrt{14}}\right)$$

Naloga 2:

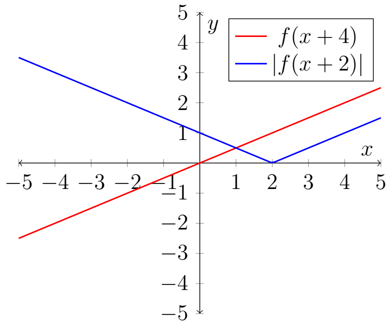
Podana je funkcija $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$. a) Nariši graf funkcije $f(-x) + 2$ in $-f(|x|)$.

Funkcija $f(-x)+2$ je $f(-x)+2 = -\frac{1}{2}x-2+2 = -\frac{1}{2}x$ Funkcija $-f(|x|)$ je $-f(|x|) = -\left(\frac{1}{2}|x| - 2\right) = -\frac{1}{2}|x|+2$



b) Nariši grafa funkcij $f(x + 4)$ in $|f(x + 2)|$.

Funkcija $f(x+4) = \frac{1}{2}(x+4)-2 = \frac{1}{2}x+2-2 = \frac{1}{2}x$ Funkcija $|f(x+2)| = \left|\frac{1}{2}(x + 2) - 2\right| = \left|\frac{1}{2}x + 1 - 2\right| = \left|\frac{1}{2}x - 1\right|$



“‘‘

c) Zapiši inverzno funkcijo funkcije $g(x) = \dfrac{f(x)}{f(x+1)}$ in izračunaj $g^{-1}(4)$.

$$g(x) = \frac{\frac{1}{2}x - 2}{\frac{1}{2}(x+1) - 2} = \frac{\frac{1}{2}x - 2}{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - 2} = \frac{\frac{1}{2}x - 2}{\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}} = \frac{x-4}{x-3}$$

Naj bo $y = \dfrac{x-4}{x-3}$. Zamenjamo x in y:

$$x = \frac{y-4}{y-3}$$
$$x(y-3) = y-4$$
$$xy - 3x = y - 4$$
$$xy - y = 3x - 4$$
$$y(x-1) = 3x - 4$$
$$y = \frac{3x-4}{x-1}$$

Torej je $g^{-1}(x) = \dfrac{3x-4}{x-1}$.

$$g^{-1}(4) = \frac{3(4)-4}{4-1} = \frac{12-4}{3} = \frac{8}{3}$$

Naloga 3:

a) Določi definicijsko območje funkcije: $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x^2}, & \text{če } |x| \geq 1 \\ 3, & \text{če } |x| < 1 \end{cases}$ in preveri sodost, lihost funkcije.

Definicijsko območje: Za $|x| \geq 1$ je $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. Za $|x| < 1$ je $x \in (-1, 1)$. Torej je definicijsko območje: $\mathbb{R}$

Sodost/lihost:

$$f(-x) = \begin{cases} \frac{3}{(-x)^2} = \frac{3}{x^2}, & \text{če } |-x| \geq 1 \\ 3, & \text{če } |-x| < 1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{3}{x^2}, & \text{če } |x| \geq 1 \\ 3, & \text{če } |x| < 1 \end{cases}$$

Torej je $f(-x) = f(x)$, kar pomeni, da je funkcija soda.

b) Izračunaj $A(-2, y), B(1, y)$ in $C(2, y)$, nato pa prezrcali A preko ordinatne osi v A_1, B preko abscisne osi v B_1, C pa preko koordinatnega izhodišča v C_1.

$$f(-2) = \frac{3}{(-2)^2} = \frac{3}{4} \implies A(-2, \frac{3}{4})$$

$$f(1) = \frac{3}{1^2} = 3 \implies B(1, 3)$$

$$f(2) = \frac{3}{2^2} = \frac{3}{4} \implies C(2, \frac{3}{4})$$

Zrcaljenja:

$$A_1(2, \frac{3}{4})$$

$$B_1(1, -3)$$

$$C_1(-2, -\frac{3}{4})$$

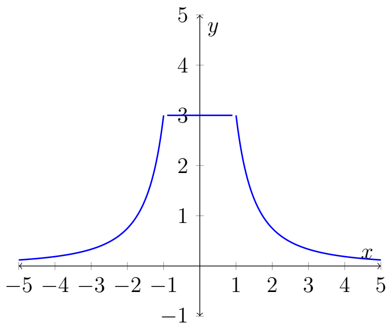
c) Kje je funkcija pozitivna?

Funkcija je pozitivna povsod, kjer je definirana, saj je $\frac{3}{x^2} > 0$ za $|x| \geq 1$ in $3 > 0$ za $|x| < 1$.

d) Določi omejenost funkcije.

Funkcija je navzdol omejena z $m = 0$, navzgor je omejena z $M = 3$, zato je omejena funkcija.

e) Nariši graf in določi njeno zalogo vrednosti.



Zaloga vrednosti funkcije je $(0, 3]$.

Naloga 4:

Podana je družina funkcij $f(x) = \sqrt{x + a} - 4$.

a) Za $a = 1$ izračunaj ničlo funkcije.

$$f(x) = \sqrt{x + 1} - 4 = 0$$

$$\sqrt{x + 1} = 4$$

$$x + 1 = 16$$

$$x = 15$$

b) Za $a = 9$ izračunaj začetno vrednost funkcije.

$$f(0) = \sqrt{0 + 9} - 4 = \sqrt{9} - 4 = 3 - 4 = -1$$

c) Določi a, da bo funkcija potekala skozi $A(1, -2)$.

$$-2 = \sqrt{1+a} - 4$$
$$2 = \sqrt{1+a}$$
$$4 = 1 + a$$
$$a = 3$$

d) Določi a, da bo definicijsko območje funkcije $[-4, \infty]$.

Definicijsko območje je $x + a \geq 0 \implies x \geq -a$. Torej mora biti $-a = -4 \implies a = 4$.

Naloga 5: ♠ $(5+5)$ $\rightsquigarrow |a. \quad |b. \quad |$

a) Izračunaj razdaljo med premicama $\vec{r} = (1,-1,2) + t(-1,3,4)$ in $\vec{r} = (2,-4,0) + u(0,3,2)$.

b) Zapiši normirani smerni vektor premice, ki je pravokotna na dani premici in enačbo ravnine skozi koordinatno izhodišče, ki je pravokotna na to premico.

a) Izračunaj razdaljo med premicama

Imamo dve premici v prostoru:

1. Premica $\overrightarrow{r}_1 = (1, -1, 2) + t(-1, 3, 4)$ 2. Premica $\overrightarrow{r}_2 = (2, -4, 0) + u(0, 3, 2)$

Koraki:

1. **Določimo smerna vektorja premic:** - Smerni vektor prve premice: $\overrightarrow{d}_1 = (-1, 3, 4)$ - Smerni vektor druge premice: $\overrightarrow{d}_2 = (0, 3, 2)$

2. **Izračunamo vektor med poljubnima točkama na premicah:** - Vzamemo točko na prvi premici pri $t = 0$: $\overrightarrow{P}_1 = (1, -1, 2)$ - Vzamemo točko na drugi premici pri $u = 0$: $\overrightarrow{P}_2 = (2, -4, 0)$ - Vektor med točkama: $\overrightarrow{P}_1\overrightarrow{P}_2 = \overrightarrow{P}_2 - \overrightarrow{P}_1 = (2 - 1, -4 - (-1), 0 - 2) = (1, -3, -2)$

3. **Izračunamo vektorski produkt smernih vektorjev:**

$$\overrightarrow{d}_1 \times \overrightarrow{d}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(3 \cdot 2 - 4 \cdot 3) - \mathbf{j}(-1 \cdot 2 - 4 \cdot 0) + \mathbf{k}(-1 \cdot 3 - 3 \cdot 0)$$

$$= \mathbf{i}(6 - 12) - \mathbf{j}(-2 - 0) + \mathbf{k}(-3 - 0) = -6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k} = (-6, 2, -3)$$

4. **Izračunamo dolžino vektorskega produkta:**

$$|\overrightarrow{d}_1 \times \overrightarrow{d}_2| = \sqrt{(-6)^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{36 + 4 + 9} = \sqrt{49} = 7$$

5. **Izračunamo skalarni produkt vektorja med točkama in vektorskega produkta:**

$$\overrightarrow{P}_1\overrightarrow{P}_2 \cdot (\overrightarrow{d}_1 \times \overrightarrow{d}_2) = (1, -3, -2) \cdot (-6, 2, -3) = 1 \cdot (-6) + (-3) \cdot 2 + (-2) \cdot (-3) = -6 - 6 + 6 = -6$$

6. **Izračunamo razdaljo med premicama:**

$$d = \frac{|\overrightarrow{P}_1\overrightarrow{P}_2 \cdot (\overrightarrow{d}_1 \times \overrightarrow{d}_2)|}{|\overrightarrow{d}_1 \times \overrightarrow{d}_2|} = \frac{|-6|}{7} = \frac{6}{7}$$

Rešitev:

Razdalja med premicama je $\boxed{\frac{6}{7}}$.

—

b) Normirani smerni vektor premice in enačba ravnine

1. Normirani smerni vektor premice, ki je pravokotna na dani premici:

Naj bo $\overrightarrow{d}$ smerni vektor premice, ki je pravokotna na obe dani premici. Ta vektor je enak vektorskemu produktu smernih vektorjev danih premic:

$$\overrightarrow{d} = \overrightarrow{d}_1 \times \overrightarrow{d}_2 = (-6, 2, -3)$$

Normirani smerni vektor dobimo tako, da vektor $\overrightarrow{d}$ delimo z njegovo dolžino:

$$|\overrightarrow{d}| = \sqrt{(-6)^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{36 + 4 + 9} = \sqrt{49} = 7$$

Normirani smerni vektor je:

$$\overrightarrow{d}_{\text{norm}} = \frac{\overrightarrow{d}}{|\overrightarrow{d}|} = \left(\frac{-6}{7}, \frac{2}{7}, \frac{-3}{7}\right)$$

2. Enačba ravnine skozi koordinatno izhodišče, ki je pravokotna na to premico:

Ravnina, ki je pravokotna na premico s smernim vektorjem $\overrightarrow{d} = (-6, 2, -3)$, ima enačbo:

$$-6x + 2y - 3z = 0$$

Rešitev:

- Normirani smerni vektor: $\boxed{\left(\frac{-6}{7}, \frac{2}{7}, \frac{-3}{7}\right)}$ - Enačba ravnine: $\boxed{-6x + 2y - 3z = 0}$