Test 3.2 : Vektorji 2. Geometrija v prostoru. Analiza funkcij. $G-2$

Ime in priimek: ____________________

Naloga 1: $3+4+4$ $\rightsquigarrow$ $|a.$ $|b.$ $|c.$ $|d.$ $|$

a) Ali leži točka $A(4,5,12)$ na premici p: $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{6}$?

b) Kakšen kot oklepa premica z abscisno osjo?

c) Zapiši vektor, ki je pravokoten na premico p in premico $\overrightarrow{r}=(1,2,3)+t(1,1,1)$.

Naloga 2: $4 + 4 + 3$ $\rightsquigarrow |a. \quad |b. \quad |c. \quad |$

a) Izračunaj kot med ravnino $\Pi : 2x - 2y - z = 5$ in premico $\vec{r} = (4, -2, 3) + t(-1, 2, -6)$. Ali obstaja kakšna njuna skupna točka?

b) Določi kot med ravnino Π in xy ravnino.

c) Koliko je točka $M(3, -2 - 5)$ oddaljena od ravnine Π?

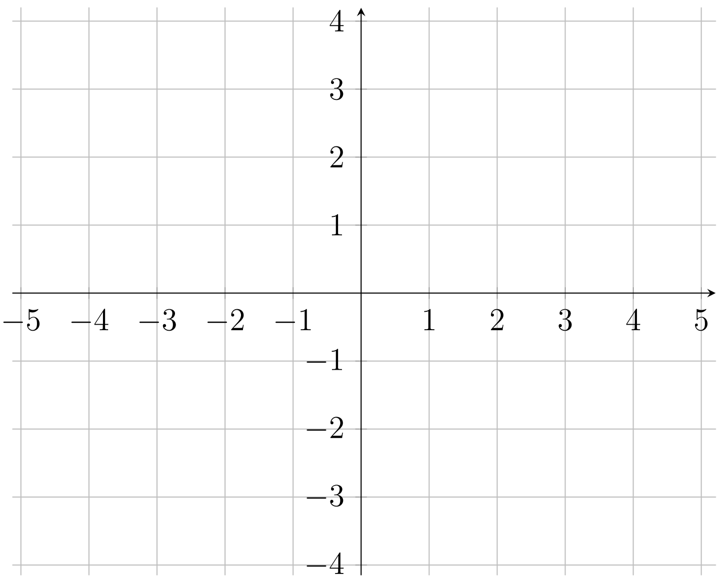
Naloga 3: $3 + 3 + 2$ $\rightsquigarrow |a. \quad |b. \quad |c. \quad |$

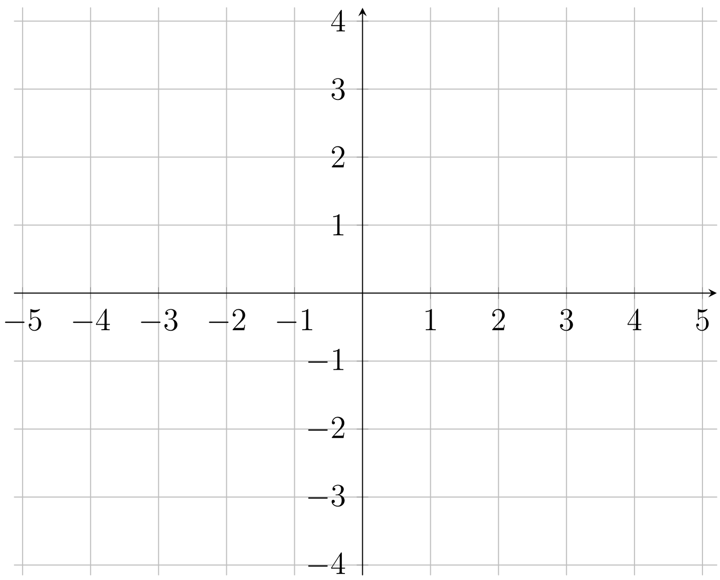
Podana je funkcija $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{če } 0 < x \leq 2 \\ -x - 1, & \text{če } -2 \leq x \leq 0 \end{cases}$

a) Nariši graf funkcije f in ji določi zalogo vrednosti.

b) Nariši graf funkcij $|f(-x)|$ in zapiši ničle te funkcije.

c) Kako je s sodostjo/lihostjo funkcije $f(|x|)$?





Naloga 4: $4+2+4 \quad \rightsquigarrow |a. \quad |b. \quad |c. \quad |$

Podana je družina funkcij $f(x) = \dfrac{2x+a}{x+b}$.

a) Za $a = b = 1$ določi inverzno funkcijo f^{-1} in izračunaj $f^{-1}(3)$.

b) Določi a, da bo začetna vrednost funkcije enaka 3, če je $b = 2$.

c) Določi a in b, da bo funkcija potekala skozi $A(-2, 1)$ in $B(1, \frac{5}{2})$.

Število doseženih točk na testu: **število vseh točk na testu:** 40

ocena	1	2	3	4	5	uspešnost v %	**OCENA**
%	$[0, 45)$	$[45, 60)$	$[60, 75)$	$[75, 90)$	$[90, 100]$		

Seveda! Tukaj so rešitve z razlago v slovenščini in matematičnim zapisom v LaTeX-u.

—

Naloga 1

a) Ali leži točka $A(4,5,12)$ na premici $p : \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{6}$?

Postopek:

Točka A leži na premici, če obstaja parameter t, da so izpolnjene vse tri enačbe:

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{6} = t$$

Za $A(4,5,12)$ dobimo:

$$\frac{4+2}{3} = \frac{6}{3} = 2\frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2\frac{12}{6} = 2$$

Ker velja za vse tri komponente:

$$t = 2$$

Odgovor: Da, točka $A(4,5,12)$ leži na premici p.

—

b) Kakšen kot oklepa premica z abscisno osjo?

Premica ima smerni vektor $\overrightarrow{d}_p = (3,2,6)$, abscisna os (os x) pa ima smerni vektor $\overrightarrow{i} = (1,0,0)$.

Kot med vektorjema računamo po formuli:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{d}_p \cdot \overrightarrow{i}}{|\overrightarrow{d}_p| \cdot |\overrightarrow{i}|}$$

$$\overrightarrow{d}_p \cdot \overrightarrow{i} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = 3$$

$$|\overrightarrow{d}_p| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2} = \sqrt{9+4+36} = \sqrt{49} = 7$$
$$|\overrightarrow{i}| = 1$$
$$\cos\varphi = \frac{3}{7 \cdot 1} = \frac{3}{7}$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{3}{7}\right)$$

Odgovor: Kot je $\varphi = \arccos\left(\frac{3}{7}\right)$.

—

c) Zapiši vektor, ki je pravokoten na premico p in premico $\overrightarrow{r} = (1,2,3) + t(1,1,1)$.

Smerni vektor premice p je $\overrightarrow{d}_p = (3,2,6)$, premice $\overrightarrow{r}$ pa $\overrightarrow{d}_r = (1,1,1)$.

Vektor, ki je pravokoten na oba, dobimo z **vektorskim produktom**:

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{d}_p \times \overrightarrow{d}_r = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{k}$$

$$= (2 \cdot 1 - 6 \cdot 1)\overrightarrow{i} - (3 \cdot 1 - 6 \cdot 1)\overrightarrow{j} + (3 \cdot 1 - 2 \cdot 1)\overrightarrow{k} = (-4,3,1)$$

Odgovor: Vektor, ki je pravokoten na obe premici, je $\boxed{(-4,\ 3,\ 1)}$.

—

Če želiš, lahko nadaljujem tudi z naslednjimi nalogami!