TEST 1.1 : Eksponentna funkcija. Logaritemska funkcija $G-3$

IME IN PRIIMEK: ______________________________

Naloga 1: $4+4+4+4$ $\rightsquigarrow |a.$ |

Reši enačbo:

a.) $\log_5(x+1)+\log_5(x-3)=1$

b.) $3^{\frac{x+1}{2}}=\sqrt[3]{3^{x-1}}$

c.) $5^{x+1}=2^{2-x}$ (rešitev zapiši v obliki logaritma $\log_a b$)

d.) $\log_2 x+\log_4 x=\dfrac{9}{2}$

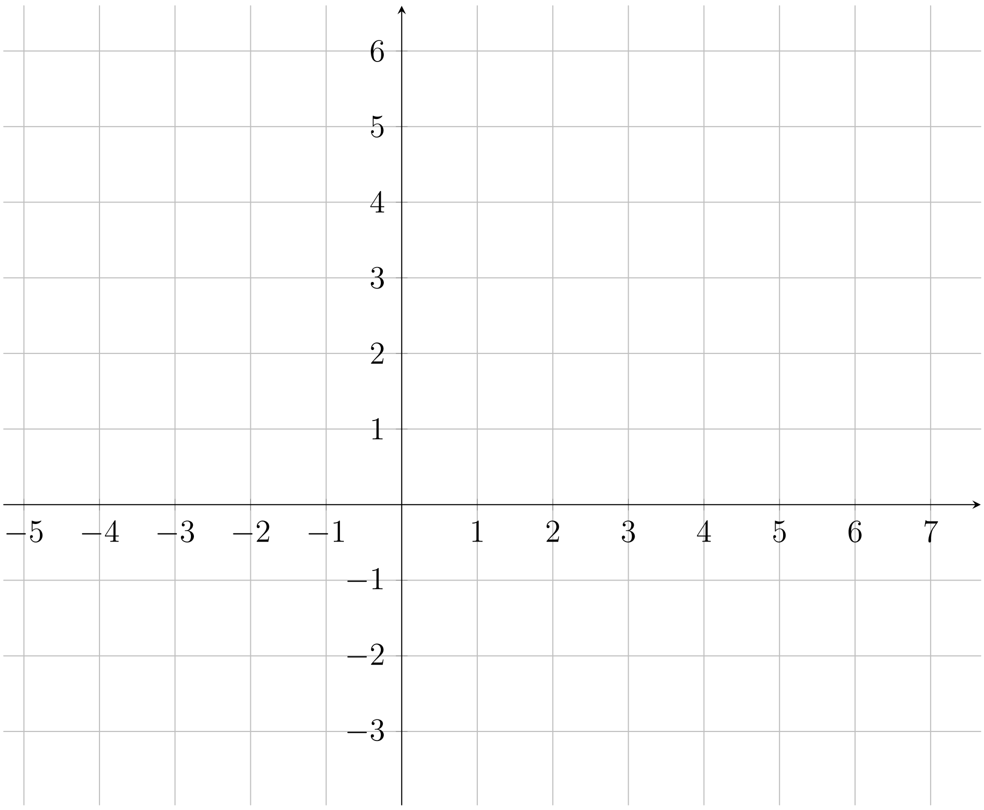
Naloga 2: $(2+1+1)+(3+1)+2 \quad \rightsquigarrow |a. \quad |b. \quad |c. \quad |$

Podana je funkcija $f(x) = \left(\dfrac{4}{3}\right)^{x+2} - 1$.

a.) Določi ničlo, začetno vrednost in zalogo vrednosti funkcije f.

b.) Pokaži, da je inverzna funkcija enaka $f^{-1}(x) = \log_{\frac{4}{3}}\left(\dfrac{9x+9}{16}\right)$ in zapiši njeno asimptoto.

c.) Nariši grafa obeh funkcij.



Naloga 3: $4+3$ $\rightsquigarrow |a. \quad |b. \quad |c. \quad |d. \quad |$

Izračunaj brez kalkulatorja:

a) $\log_a 5 + \log_a \frac{\sqrt[3]{a^2}}{5} - \log_5 6a \cdot \log_{6a} 25$

b) $\sqrt[3]{a^2 b^{-1}} \cdot \sqrt[6]{ab^{-5}} : \sqrt{a^{-1} \cdot \sqrt{b}}$

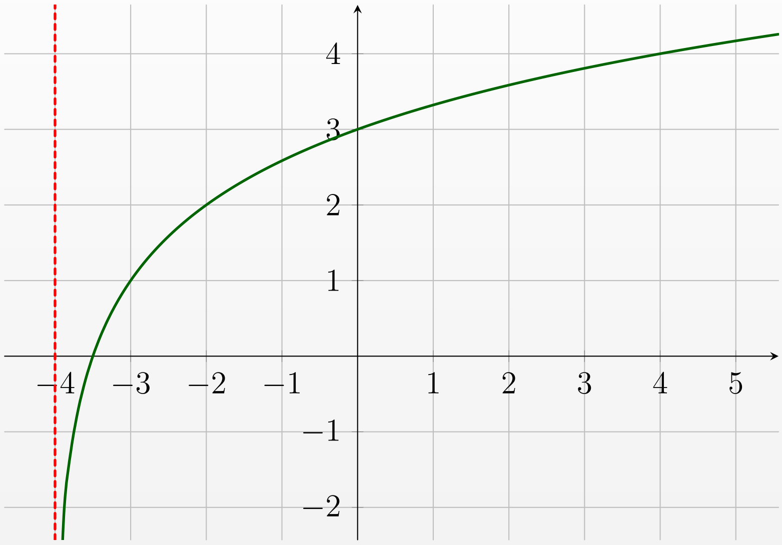
Naloga 4: 3 $\rightsquigarrow |a. \quad |b. \quad |c. \quad |$

Določi x, če je :

$$\log_a x = \frac{1}{6} \log_a 5 - \frac{2}{3} \log_a 125 + \log_a \sqrt{5}$$

Naloga 5: 4 $\rightsquigarrow$ $|a.$ $|b.$ $|c.$ $|d.$ $|$

Na sliki je graf funkcije $f(x) = \log_2(x + a) + b$. Določi konstanti a in b in vrednost $\dfrac{f(96) - 1}{f(6) - 1}$.



Število doseženih točk na testu: **število vseh točk na testu:** 40

ocena	1	2	3	4	5	uspešnost v %	**OCENA**
%	$[0, 45)$	$[45, 60)$	$[60, 75)$	$[75, 90)$	$[90, 100]$		

Analiza Naloge 1

a) $\log_5(x+1) + \log_5(x-3) = 1$

Pogoja: $x+1>0 \Rightarrow x>-1$ in $x-3>0 \Rightarrow x>3$. Torej $x>3$.

Uporabimo pravilo za vsoto logaritmov:

$$\log_5((x+1)(x-3)) = 1$$

$$(x+1)(x-3) = 5^1$$

$$x^2 - 3x + x - 3 = 5$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2}$$

$$x_1 = 4, \quad x_2 = -2$$

Ker mora veljati $x>3$, je edina rešitev $\boxed{4}$.

b) $3^{\frac{x+1}{2}} = \sqrt[3]{3^{x-1}}$

Zapišemo obe strani z isto osnovo:

$$3^{\frac{x+1}{2}} = 3^{\frac{x-1}{3}}$$

Ker sta osnovi enaki, lahko izenačimo eksponenta:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{x-1}{3}$$

Množimo z 6:

$$3(x+1) = 2(x-1)$$

$$3x + 3 = 2x - 2$$

$$x = -5$$

Rešitev je $\boxed{-5}$.

c) $5^{x+1} = 2^{2-x}$

Vzamemo logaritem (npr. naravni) obeh strani:

$$\ln(5^{x+1}) = \ln(2^{2-x})$$

$$(x+1)\ln 5 = (2-x)\ln 2$$

$$x\ln 5 + \ln 5 = 2\ln 2 - x\ln 2$$

$$x\ln 5 + x\ln 2 = 2\ln 2 - \ln 5$$

$$x(\ln 5 + \ln 2) = \ln 4 - \ln 5$$

$$x\ln 10 = \ln\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$x = \frac{\ln\left(\frac{4}{5}\right)}{\ln 10}$$

Rešitev lahko zapišemo kot $\boxed{\log_{10}\left(\frac{4}{5}\right)}$.

d) $\log_2 x + \log_4 x = \frac{9}{2}$

Zapišemo vse logaritme z osnovo 2. Uporabimo formulo za spremembo osnove: $\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x}{2}$.

$$\log_2 x + \frac{\log_2 x}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\frac{3}{2}\log_2 x = \frac{9}{2}$$

$$\log_2 x = 3$$

$$x = 2^3 = 8$$

Rešitev je $\boxed{8}$.

Analiza Naloge 2

Podana je funkcija $f(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^{x+2} - 1$.

a) Ničla, začetna vrednost, zaloga vrednosti

Ničla: $f(x) = 0$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{x+2} - 1 = 0$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{x+2} = 1$$

$$x + 2 = 0$$

$$x = -2$$

Ničla je $\boxed{-2}$.

Začetna vrednost: $f(0) = \left(\frac{4}{3}\right)^{0+2} - 1 = \left(\frac{16}{9}\right) - 1 = \frac{7}{9}$. Začetna vrednost je $\boxed{\frac{7}{9}}$.

Zaloga vrednosti: Ker je $\left(\frac{4}{3}\right)^{x+2} > 0$ za vse x, je $f(x) > -1$. Zaloga vrednosti je $\boxed{(-1, \infty)}$.

b) Inverzna funkcija in asimptota

Pokažemo, da je $f^{-1}(x) = \log_{\frac{4}{3}}\left(9x + \frac{9}{16}\right)$ Poiščemo pravo inverzno funkcijo.

$y = \left(\frac{4}{3}\right)^{x+2} - 1$ $y + 1 = \left(\frac{4}{3}\right)^{x+2}$ $\log_{\frac{4}{3}}(y+1) = x + 2$ $x = \log_{\frac{4}{3}}(y+1) - 2$

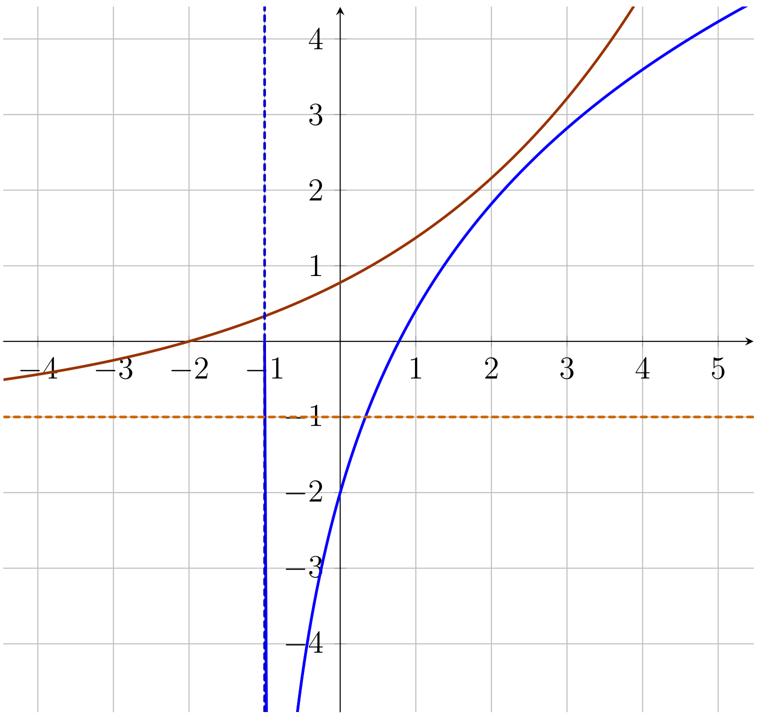
Torej je $f^{-1}(x) = \log_{\frac{4}{3}}(x+1) - 2$.

Preverimo dani izraz: Če vzamemo $f(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^{x+2} - 1$, potem je inverz $f^{-1}(x) = \log_{\frac{4}{3}}(x+1) - 2 = \log_{\frac{4}{3}}(x+1) - \log_{\frac{4}{3}} \frac{16}{9} = \log_{\frac{4}{3}} \left(\frac{9x+9}{16}\right)$.

Asimptota inverzne funkcije: Definicijsko območje za f^{-1} je $x > -1$. Vertikalna asimptota je pri $x = -1$.

c)

Grafa $f(x)$ in $f^{-1}(x)$ sta simetrična glede na premico $y = x$. $f(x)$: eksponentna funkcija, premaknjena za 2 v levo in 1 navzdol. Asimptota $y = -1$. $f^{-1}(x)$: logaritemska funkcija, premaknjena za 1 v levo in 2 navzdol. Asimptota $x = -1$.



Analiza Naloge 3

a) $\log_a 5 + \log_a \frac{\sqrt[3]{a^2}}{5} - \log_5 6a \cdot \log_{6a} 25$

Prva dva člena: $\log_a 5 + \log_a \left(a^{2/3} \cdot 5^{-1}\right) = \log_a \left(5 \cdot a^{2/3} \cdot 5^{-1}\right) = \log_a \left(a^{2/3}\right) = \frac{2}{3}$.

Tretji člen: $\log_5 6a \cdot \log_{6a} 25$. Uporabimo pravilo $\log_p q \cdot \log_q r = \log_p r$. Torej: $\log_5 6a \cdot \log_{6a} 25 = \log_5 25 = 2$.

Celoten izraz: $\frac{2}{3} - 2 = \frac{2}{3} - \frac{6}{3} = -\frac{4}{3}$.

Rešitev: $\boxed{-\frac{4}{3}}$.

b)Poenostavimo izraz:

$$\sqrt[3]{a^2 b^{-1}} \cdot \sqrt[6]{ab^{-5}} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{b^{-1}}$$

Zapišimo vse korene z racionalnimi eksponenti:

$$\sqrt[3]{a^2b^{-1}} = (a^2b^{-1})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{3}}$$
$$\sqrt[6]{ab^{-5}} = (ab^{-5})^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{6}}b^{-\frac{5}{6}}$$
$$\sqrt{a^{-1}} = (a^{-1})^{\frac{1}{2}} = a^{-\frac{1}{2}}$$
$$\sqrt[4]{b^{-1}} = (b^{-1})^{\frac{1}{4}} = b^{-\frac{1}{4}}$$

Zdaj zmnožimo vse faktorje:

$$a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{6}}b^{-\frac{5}{6}} \cdot a^{-\frac{1}{2}} \cdot b^{-\frac{1}{4}}$$

Ločeno seštejemo eksponente za a in za b:

Eksponent za a:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6} + \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Eksponent za b:

$$-\frac{1}{3} - \frac{5}{6} - \frac{1}{4} = -\frac{4}{12} - \frac{10}{12} - \frac{3}{12} = -\frac{17}{12}$$

Torej je poenostavljeni izraz:

$$a^{\frac{4}{3}}b^{-\frac{17}{12}} = \frac{a^{\frac{4}{3}}}{b^{\frac{17}{12}}}$$

Analiza Naloge 4

$\log_a x = \frac{1}{6}\log_a 5 - \frac{2}{3}\log_a 125 + \log_a \sqrt{5}$

Uporabimo logaritemske zakone:

$$\log_a x = \log_a \left(5^{\frac{1}{6}}\right) - \log_a \left(125^{\frac{2}{3}}\right) + \log_a \left(5^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\log_a x = \log_a \left(5^{\frac{1}{6}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} \cdot 125^{-\frac{2}{3}}\right)$$

Ker je $125 = 5^3$, je $125^{\frac{2}{3}} = (5^3)^{\frac{2}{3}} = 5^2 = 25$.

$$\log_a x = \log_a \left(5^{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}} \cdot 25^{-1}\right) = \log_a \left(5^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{25}\right)$$

$$\log_a x = \log_a \left(\frac{5^{\frac{2}{3}}}{25}\right) = \log_a \left(\frac{5^{\frac{2}{3}}}{5^2}\right) = \log_a \left(5^{\frac{2}{3}-2}\right) = \log_a \left(5^{-\frac{4}{3}}\right)$$

Torej je $x = 5^{-\frac{4}{3}}$.

Rešitev: $\boxed{5^{-\frac{4}{3}}}$.

Analiza Naloge 5

Graf funkcije $f(x) = \log_2(x + a) + b$.

lahko običajno določimo a in b. Denimo, da iz grafa razberemo: - Vertikalna asimptota je pri $x = -4$, torej $a = 4$ ($-4 + a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 4}$). Velja $f(x) = \log_2(x+4) + b$, ki poteka skozi točko $(0, 3)$. Sledi $3 = \log_2(0+4) + b$, tako je $\boxed{b = 1}$.

Izračunajmo $\dfrac{f(96)-1}{f(6)-1}$.

$f(96) = (\log_2(96+4)+1) - 1 = \log_2 100$. $f(6) = (\log_2(6+4)+1) - 1 = \log_2 10$

$\dfrac{f(96)-1}{f(6)-1} = \dfrac{2\log_2 10}{\log_2 10} = 2$.