

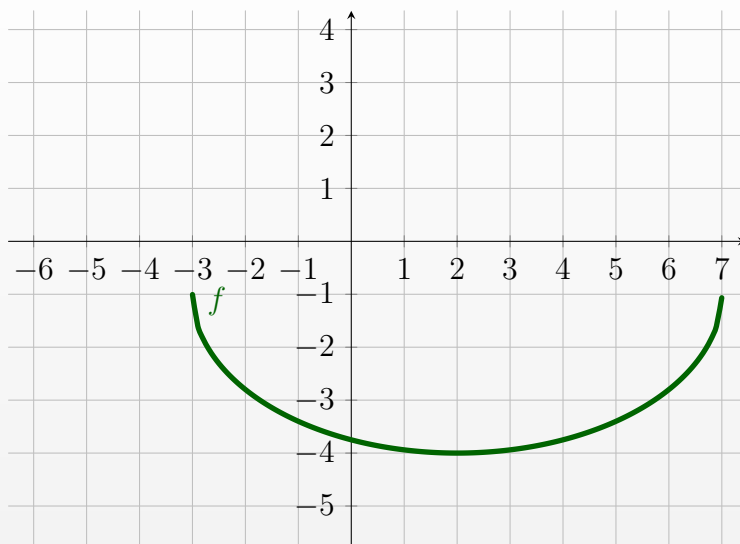


IME IN PRIIMEK: _____

Naloga 1:

3 + (1 + 2 + 1) + 3 \rightsquigarrow |a. |b. |c. |

- a) Zapišite enačbo elipse s središčem v točki $S(2, -1)$, veliko polosjo $a = 5$, ki je vzporedna z abscisno osjo, in malo polosjo $b = 3$.
- b) Določite koordinate gorišč in izračunajte numerično ekscentričnost.
- c) Določi funkcijski predpis za funkcijo na sliki:



Naloga 2:

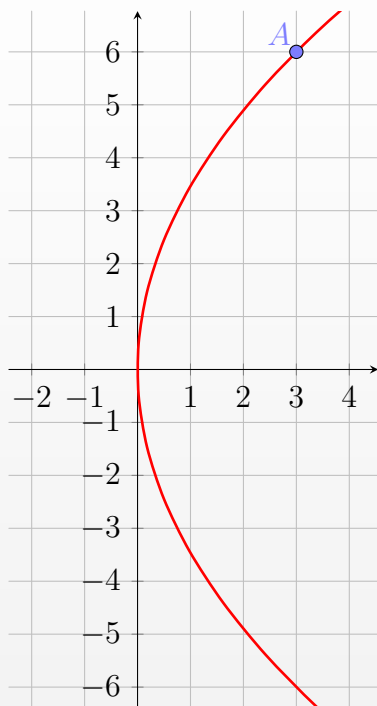
$$(2 + 2) + (5 + 2) + (2 + 2)$$

 $\rightsquigarrow |a.$ $|b.$ $|c.$

|

Hiperbola v premaknjeni legi ima enačbo: $16y^2 - 9x^2 - 64y - 18x - 89 = 0$.

- a) Določi središče hiperbole in dolžini obeh obeh polosi.
- b) Določi temeni T_1, T_2 , gorišči F_1, F_2 in enačbi obeh asimptot.
- c) Izračunaj numerično ekscentričnost in zapiši vrednost $|d(T, F_1) - d(T, F_2)|$, kjer je T poljubna točka na hiperboli.



a) Zapiši enačbo parabole na sliki in določi gorišče in enačbo vodnice.

b) Zapiši presečišča parabole s krožnico, ki ima središče v koordinatnem izhodišču in polmer $12\sqrt{2}$.

Naloga 4: $(3 + 4) + (3 + 3 + 2)$ $\rightsquigarrow |a.$ $|b.$

|

a) V trikotniku s stranicami 15 cm, 17 cm in 8 cm izračunaj ploščino in najmanjši notranji kot. Koliko meri ploščina lika med očrtano in včrtano krožnico trikotnika.

b) V trapezu $ABCD$ ($a > c$) merita osnovnici 10 cm in 5 cm, notranji kot $\beta = 60^\circ$, krak b meri 6 cm. Izračunaj ploščino trapeza, natančno dolžino diagonale e in velikost kota $\angle BAC$ na kotno stopinjo natančno.

Število doseženih točk na testu:

število vseh točk na testu: 50

ocena	1	2	3	4	5	uspešnost v %	OCENA
%	[0, 45)	[45, 60)	[60, 75)	[75, 90)	[90, 100]		



Rešitve nalog

1. Naloga: Elipsa (10 točk)

a) **Enačba elipse:** Središče $S(2, -1)$, $a = 5$ (vzporedno z x), $b = 3$.

$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

b) **Gorišči in ekscentričnost:** $e^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16 \implies e = 4$. Gorišči: $F_1(2-4, -1) = F_1(-2, -1)$, $F_2(2+4, -1) = F_2(6, -1)$. Numerična ekscentričnost: $\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{4}{5} = 0.8$.

c) **Funkcijski predpis:** Iz enačbe elipse izrazimo y (spodnja veja):

$$(y+1)^2 = 9 \left(1 - \frac{(x-2)^2}{25} \right) \implies y = -1 - 3\sqrt{1 - \frac{(x-2)^2}{25}}$$

2. Naloga: Hiperbola (15 točk)

Podana enačba: $16y^2 - 9x^2 - 64y - 18x - 89 = 0$. Uredimo kvadratne forme:

$$16(y^2 - 4y) - 9(x^2 + 2x) = 89$$

$$16(y-2)^2 - 64 - 9(x+1)^2 + 9 = 89 \implies 16(y-2)^2 - 9(x+1)^2 = 144$$

Delimo s 144:

$$\frac{(y-2)^2}{9} - \frac{(x+1)^2}{16} = 1$$

a) Središče $S(-1, 2)$. Polosi: $b = 3$ (glavna - navpična), $a = 4$ (stranska). b) $e^2 = 9 + 16 = 25 \implies e = 5$. Temeni: $T_1(-1, 5)$, $T_2(-1, -1)$. Gorišči: $F_1(-1, 7)$, $F_2(-1, -3)$. Asimptote: $y - 2 = \pm \frac{3}{4}(x + 1)$. c) $\varepsilon = \frac{e}{b} = \frac{5}{3}$. Razlika razdalj: $|d(T, F_1) - d(T, F_2)| = 2b = 6$.

3. Naloga: Parabola (10 točk)

a) S slike razberemo teme $T(0, 0)$ in točko $A(3, 6)$. Ker je os x , je enačba $y^2 = 2px$. $6^2 = 2p(3) \implies 36 = 6p \implies p = 6$. Enačba: $y^2 = 12x$. Gorišče $F(3, 0)$, vodnica $x = -3$.

b) [Presečišča s krožnico] Podana je krožnica s polmerom $r = 12\sqrt{2}$. Njena enačba je:

$$x^2 + y^2 = (12\sqrt{2})^2 \implies x^2 + y^2 = 288$$

Iščemo presečišča s parabolo $y^2 = 12x$. Rešimo enačbo:

$$x^2 + 12x = 288$$

$$x^2 + 12x - 288 = 0$$

Kvadratno enačbo razcepimo (ali uporabimo diskriminanto $D = 1296$):

$$(x + 24)(x - 12) = 0$$

Ker mora biti pri paraboli $y^2 = 12x$ vrednost $x \geq 0$, rešitev $x = -24$ ni ustrezna. Upoštevamo le $x = 12$. Izračunamo y :

$$y^2 = 12 \cdot 12 = 144 \implies y = \pm 12$$

Presečišči sta $\mathbf{P}_1(12, 12)$ in $\mathbf{P}_2(12, -12)$.

4. Naloga: Trigonometrija (15 točk)

a) Stranice 15, 17, 8. Preverimo: $8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289 = 17^2$ (Pravokotni trikotnik). Ploščina $S = \frac{8 \cdot 15}{2} = 60 \text{ cm}^2$. Najmanjši kot (nasproti stranice 8): $\sin \alpha = \frac{8}{17} \implies \alpha \approx 28.07^\circ$. Polmera: $R = \frac{c}{2} = 8.5$, $r = \frac{S}{s} = \frac{60}{20} = 3$. Ploščina med krožnicama: $\pi(8.5^2 - 3^2) = 63.25\pi \approx 198.7 \text{ cm}^2$.

b) **Trapez:** $a = 10, c = 5, b = 6, \beta = 60^\circ$. Višina $v = b \cdot \sin 60^\circ = 3\sqrt{3} \text{ cm}$. Ploščina $S = \frac{10 + 5}{2} \cdot 3\sqrt{3} = 22.5\sqrt{3} \approx 38.97 \text{ cm}^2$. Diagonala e (v $\triangle ABC$): $e^2 = 10^2 + 6^2 - 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ = 136 - 60 = 76 \implies e = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$. $\sin(\angle BAC) = \frac{6 \sin 60^\circ}{\sqrt{76}} \implies \angle BAC \approx 37^\circ$.

Podroben točkovnik (Skupaj 50 točk)

1. Naloga 1 (Elipsa) — 10 točk

- a) Pravilen zapis enačbe s središčem: 3 t
- b) Izračun e , koordinat gorišč in ε : 4 t (1+2+1)
- c) Preoblikovanje v funkcijsko obliko $y = f(x)$: 3 t

2. Naloga 2 (Hiperbola) — 15 točk

- a) Preoblikovanje v središčno obliko (dopolnjevanje kvadratov): 4 t
- b) Središče, polosi, temeni in gorišči: 5 t
- b) Enačbi asimptot: 2 t
- c) Numerična ekscentričnost: 2 t
- c) Definijska lastnost razlike razdalj ($2b$): 2 t

3. Naloga 3 (Parabola) — 10 točk

- a) Določitev parametra p in enačbe: 3 t
- a) Gorišče in vodnica: 2 t
- b) Nastavek sistema enačb: 2 t
- b) Reševanje kvadratne enačbe in izločitev napačne rešitve: 3 t

4. Naloga 4 (Trigonometrija) — 15 točk

- a) Ploščina in kot trikotnika: 3 t
- a) Polmera R, r in ploščina kolobarja: 4 t
- b) Višina in ploščina trapeza: 3 t
- b) Izračun diagonale e (kosinusni izrek): 3 t
- b) Izračun kota $\angle BAC$: 2 t