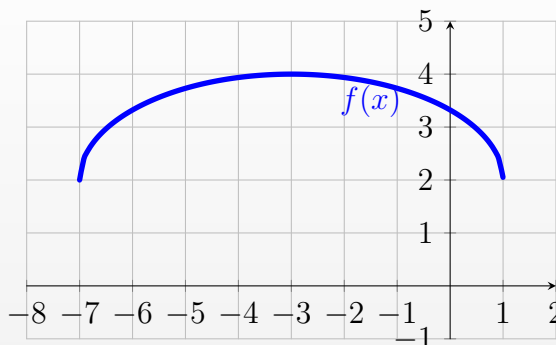


Naloga 1:

10 točk

- a) Zapišite enačbo elipse s središčem v točki $S(-3, 2)$, veliko polosjo $a = 4$ (vzdolž abscisne osi) in malo polosjo $b = 2$.
- b) Določite koordinate obeh gorišč F_1, F_2 in izračunajte numerično ekscentričnost ε .
- c) S slike določi funkcijski predpis za zgornjo polovico te elipse.



Naloga 2:

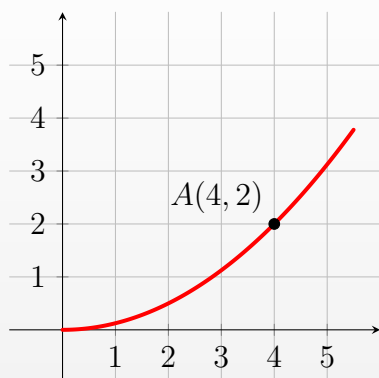
15 točk

Podana je enačba hiperbole $9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$.

- a) Enačbo preoblikuj in določi središče $S(p, q)$ in dolžini polosi a, b .
- b) Določi temeni T_1, T_2 , gorišči F_1, F_2 in zapiši enačbi obeh asimptot.
- c) Izračunaj numerično ekscentričnost in vrednost izraza $|d(T, F_1) - d(T, F_2)|$ za poljubno točko T na tej hiperboli.

Naloga 3:

10 točk



- a) Parabola (del na sliki) ima teme v izhodišču $S(0, 0)$ in poteka skozi točko $A(4, 2)$. Zapiši njeno enačbo, določi gorišče F in enačbo vodnice.
- b) Izračunaj presečišča te parabole s krožnico $x^2 + y^2 = 20$.

Naloga 4:

20 točk

- a) **Trikotnik:** V trikotniku s stranicami $a = 7$ cm, $b = 24$ cm in $c = 25$ cm izračunaj višino na najdaljšo stranico (v_c), polmer včrtane krožnice r , dolžino težiščnice na stranico a (t_a).
- b) **Trapez:** V enakokrakem trapezu $ABCD$ so podane stranice $a = 12$ cm, $c = 4$ cm in krak $b = d = 7$ cm. Izračunaj ploščino S , kot med diagonalo in krajšo osnovnico (kot $\angle ACB$), ploščino tistega **krožnega odseka**, ki ga določa daljša osnovnica a v očrtanem krogu tega trapeza.

*Rešitve nalog - Različica B

*1. Naloga: Elipsa **a)** Središče $S(-3, 2)$, $a = 4, b = 2$: $\frac{(x+3)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

b) $e^2 = a^2 - b^2 = 16 - 4 = 12 \implies e = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \approx 3.46$.

$F_1(-3 - 2\sqrt{3}, 2), F_2(-3 + 2\sqrt{3}, 2)$.

$\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$.

c) Iz enačbe izrazimo y : $y = 2 + 2\sqrt{1 - \frac{(x+3)^2}{16}}$ (zgornji znak +).

*2. Naloga: Hiperbola **a)** $9(x^2 - 2x) - 16(y^2 + 4y) = 199$

$9(x-1)^2 - 9 - 16(y+2)^2 + 64 = 199 \implies 9(x-1)^2 - 16(y+2)^2 = 144$

$\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$.

Središče $S(1, -2)$, polosi $a = 4, b = 3$.

b) $e^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25 \implies e = 5$.

Temeni: $T_1(-3, -2), T_2(5, -2)$. Gorišči: $F_1(-4, -2), F_2(6, -2)$.

Asimptoti: $y + 2 = \pm \frac{3}{4}(x - 1)$.

c) $\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{5}{4} = 1.25$.

Razlika razdalj: $|d(T, F_1) - d(T, F_2)| = 2a = 8$.

*3. Naloga: Parabola **a)** Ker je os navpična (oblika $x^2 = 2py$) in gre skozi $A(4, 2)$:

$4^2 = 2p \cdot 2 \implies 16 = 4p \implies p = 4$. Enačba: $x^2 = 8y$.

Gorišče $F(0, p/2) = F(0, 2)$. Vodnica $y = -p/2 \implies y = -2$.

b) Presečišča: $x^2 + y^2 = 20$ in $x^2 = 8y$.

$8y + y^2 = 20 \implies y^2 + 8y - 20 = 0 \implies (y+10)(y-2) = 0$.

$y_1 = -10$ (ni možno, ker je parabola zgoraj), $y_2 = 2$.

$x^2 = 8 \cdot 2 = 16 \implies x = \pm 4$. Presečišči: $P_1(4, 2), P_2(-4, 2)$.

a) Trikotnik ($a = 7, b = 24, c = 25$):

• **Preverjanje:** $7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625 = 25^2$. Trikotnik je **pravokoten** s pravim kotom pri oglišču C ($\gamma = 90^\circ$).

• **Ploščina:** $S = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{7 \cdot 24}{2} = 84 \text{ cm}^2$.

• **Višina v_c :** $v_c = \frac{2S}{c} = \frac{168}{25} = 6.72 \text{ cm}$.

• **Polmera:** Pri pravokotnem trikotniku je $R = \frac{c}{2} = 12.5 \text{ cm}$.

$r = \frac{S}{s} = \frac{84}{28} = 3 \text{ cm}$ (kjer je $s = \frac{7 + 24 + 25}{2} = 28$).

• **Težiščnica t_a :** Težiščnica poteka od oglišča A do razpolovišča stranice a ($a/2 = 3.5$). Po Pitagorovem izreku (ker je $\gamma = 90^\circ$):

$t_a = \sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{24^2 + 3.5^2} = \sqrt{576 + 12.25} = \sqrt{588.25} \approx 24.25 \text{ cm}$.

b) Trapez ($a = 12, c = 4, b = d = 7$):

• **Višina v :** Odrezek na osnovnici $x = \frac{a - c}{2} = \frac{12 - 4}{2} = 4$.

$v = \sqrt{b^2 - x^2} = \sqrt{7^2 - 4^2} = \sqrt{33} \approx 5.74 \text{ cm}$.

• **Ploščina:** $S = \frac{a+c}{2} \cdot v = 8\sqrt{33} \approx 45.96 \text{ cm}^2$.

• **Kot med diagonalo in c ($\angle ACB$):** Najprej izračunamo dolžino diagonale e .

$$e = \sqrt{(a-x)^2 + v^2} = \sqrt{8^2 + 33} = \sqrt{97} \approx 9.85 \text{ cm}.$$

Kot $\angle ACB$ je enak kotu med diagonalo in spodnjo osnovnico ($\angle CAB$), ker sta osnovnici vzporedni.

$$\tan(\angle CAB) = \frac{v}{a-x} = \frac{\sqrt{33}}{8} \implies \angle CAB \approx 35.66^\circ = 35^\circ 40'.$$

• **Očrtan krog in krožni odsek:** Polmer očrtanega kroga enakokrakemu trapezu je enak polmeru očrtanega kroga trikotniku ABC .

$$R_{trap} = \frac{a \cdot b \cdot e}{4S_{ABC}} = \frac{12 \cdot 7 \cdot \sqrt{97}}{4 \cdot \frac{12 \cdot \sqrt{33}}{2}} = \frac{7\sqrt{97}}{2\sqrt{33}} \approx 6.0006 \text{ cm}.$$

Analiza: Ker je $a = 12$ in $R \approx 6$, je daljša osnovnica skoraj natančno **premer** kroga. Središčni kot nad tetivo a je $\theta \approx 180^\circ$.

Ploščina krožnega odseka nad a : Ker a služi kot premer, je odsek dejansko **polkrog**.

$$S_{odseka} \approx \frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 36 \approx 56.55 \text{ cm}^2.$$

Rešitev za ploščino štirikotnika:

Formula $S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ se imenuje Brahmaguptova formula. Velja izključno za tetivne štirikotnike (to so tisti štirikotniki, ki jim lahko očrtamo krožnico, njihova nasprotna kota pa sta suplementarna, torej $\alpha + \gamma = 180^\circ$). Dokaz Naj bo $ABCD$ tetivni štirikotnik s stranicami a, b, c, d .

Lastnost kotov: Pri tetivnem štirikotniku je vsota nasprotnih kotov 180° . Če kot pri oglišču B označimo s β , potem je kot pri nasprotnem oglišču D enak $180^\circ - \beta$.

Ploščina štirikotnika: Štirikotnik razdelimo z diagonalo $f = AC$ na dva trikotnika.

$$S = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC}$$

Uporabimo formulo za ploščino trikotnika s sinusom:

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \beta + \frac{1}{2}cd \sin(180^\circ - \beta)$$

Ker velja $\sin(180^\circ - \beta) = \sin \beta$, lahko izpostavimo:

$$S = \frac{1}{2}(ab + cd) \sin \beta$$

Kvadrirajmo to enačbo (da se znebimo korena kasneje):

$$4S^2 = (ab + cd)^2 \sin^2 \beta \quad \dots \text{(Enačba 1)}$$

Kosinusni izrek: Diagonalo f izrazimo z obema trikotnikoma s pomočjo kosinusnega izreka:

$$f^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta$$

$$f^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos(180^\circ - \beta)$$

Vemo, da je $\cos(180^\circ - \beta) = -\cos \beta$, zato:

$$f^2 = c^2 + d^2 + 2cd \cos \beta$$

Izenačimo oba izraza za f^2 :

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta = c^2 + d^2 + 2cd \cos \beta$$

Uredimo enačbo, da dobimo $\cos \beta$:

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2(ab + cd) \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)} \quad \dots \text{(Enačba 2)}$$

Združitev ploščine in kosinusa: Vrnimo se k (Enačbi 1) in uporabimo zvezo $\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta$:

$$4S^2 = (ab + cd)^2 (1 - \cos^2 \beta)$$

$$4S^2 = (ab + cd)^2 - (ab + cd)^2 \cos^2 \beta$$

Vstavimo $\cos \beta$ iz (Enačbe 2):

$$16S^2 = 4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2$$

To je razlika kvadratov $X^2 - Y^2 = (X - Y)(X + Y)$:

$$16S^2 = [2(ab + cd) + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)] \cdot [2(ab + cd) - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)]$$

Znotraj oklepajev opazimo kvadrate dvočlenikov:

$$16S^2 = [(a + b)^2 - (c - d)^2] \cdot [(c + d)^2 - (a - b)^2]$$

Še enkrat uporabimo razliko kvadratov na vsakem oklepaju posebej:

$$16S^2 = (a + b + c - d)(a + b - c + d)(c + d + a - b)(c + d - a + b)$$

Uvedba polobsega (s): Vemo, da je $2s = a + b + c + d$. Potem velja:

$$\begin{aligned} a + b + c - d &= (a + b + c + d) - 2d = 2s - 2d = 2(s - d) & a + b - c + d &= 2(s - c) & a - b + c + d &= 2(s - b) \\ -a + b + c + d &= 2(s - a) \end{aligned}$$

Vstavimo te izraze v enačbo:

$$16S^2 = 2(s - d) \cdot 2(s - c) \cdot 2(s - b) \cdot 2(s - a)$$

$$16S^2 = 16(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)$$

Delimo s 16 in korenimo:

$$S = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}$$

Q.E.D. (Dokazano)