Tlakovanja ravnine

Tlakovanja ravnine z pravilnimi večkotniki, pravilna in polpravilna tlakovanja.

in

vzorci tlakovanj na ulicah Istanbula

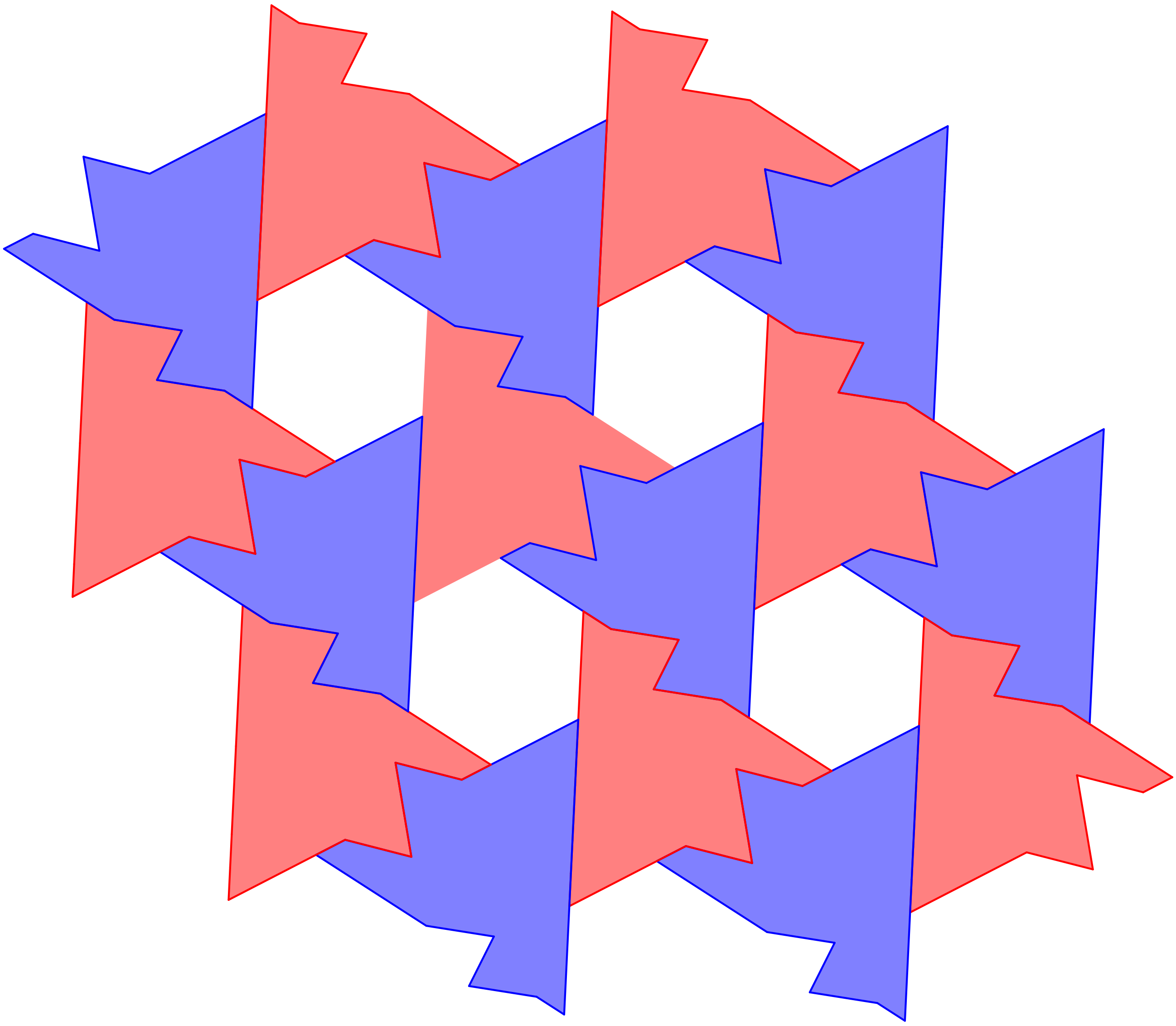
mošeja Sultan Ahmed, Topkapi, grob Mahmud Paše, Muzej turške in islamske umetnosti, mošeja Rustem Paše, grob Sultana Selima

[0]objava dodatnih razlag in ugotovitev dijakov na http://matej.info

Definicija 1

Tlakovanje (pokritje, teselacija) ravnine *je mozaična razporeditev geometrijskih likov na ravnini, tako da liki pokrivajo celotno ravnino.*

Lik imenujemo tlakovec, tlakovci se dotikajo na robu, robovi pa se stikajo v vozlišču.

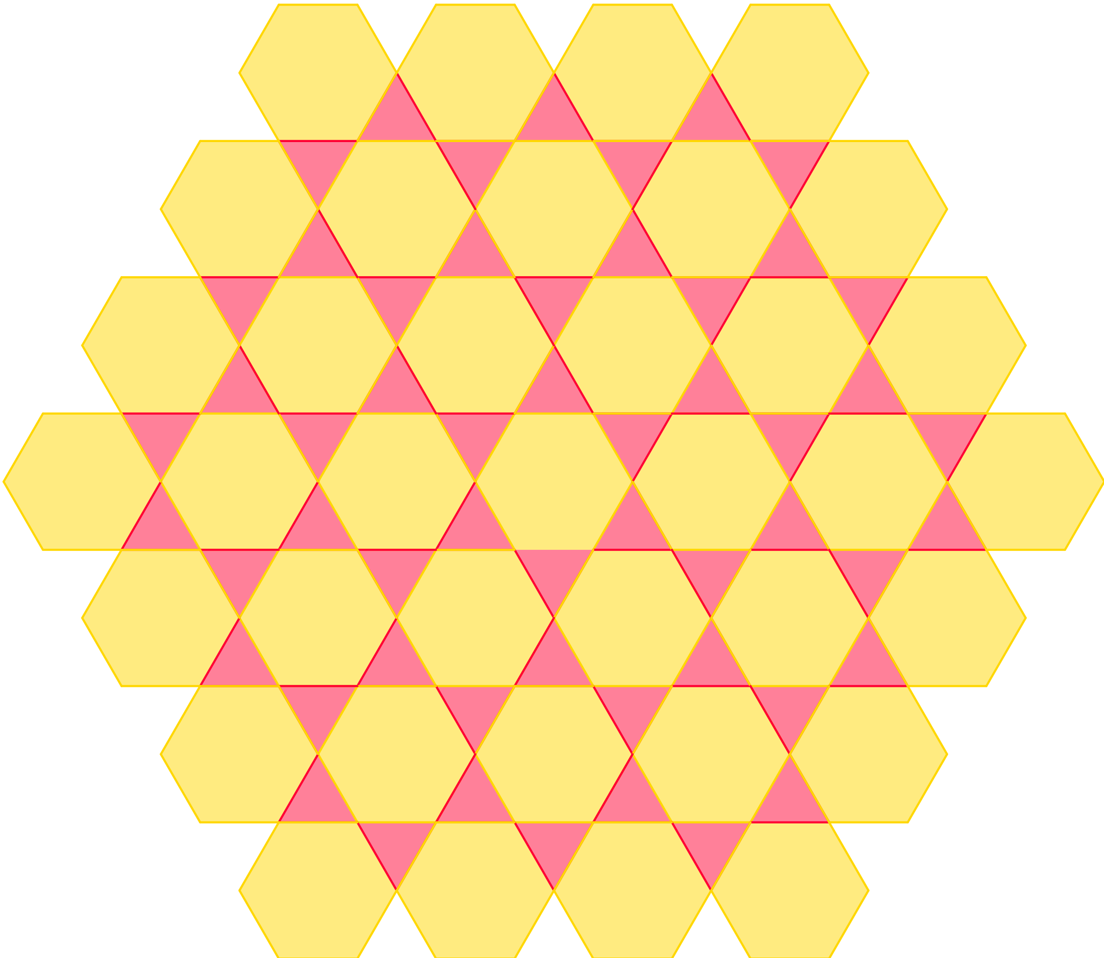


Primer tlakovanja s tremi liki (rdeči, modri in beli liki)

Definicija 2

Tlakovanje je pravilno (regularno), če je sestavljena le iz ene vrste skladnih pravilnih večkotnikov.

Tlakovanje je polpravilno (semiregularno), če vsebuje več tipov pravilnih večkotnikov. Takim tlakovanjem pravimo tudi Arhimedska.

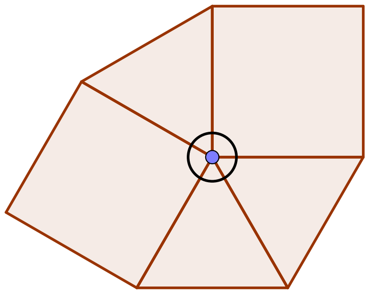


Primer polpravilne teselacije

! 1

Pri tlakovanju je v vozlišču vsota notranjih kotov enaka ________________.

Okoli oglišča so kvadrat in enakostranična trikotnika, kvadrat in enakostranični trikotnik. Če to velja za vsako vozlišče, pravimo, da je tlakovanje tipa $(3, 3, 4, 3, 4)$.



! 2

Če je okoli vozlišča m *pravilnih* $n-$*kotnikov, velja* $m \cdot \frac{(n-2)180°}{n} = 360°$. *Pokaži, kateri pari* (m, n) *so rešitev.*

Število pravilnih tlakovanj ravnine je __________.

Zapiši vse tipe pravilnih tlakovanj ravnine: ____

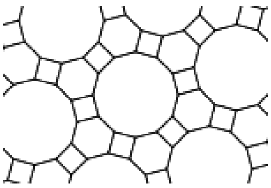
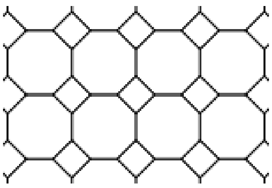
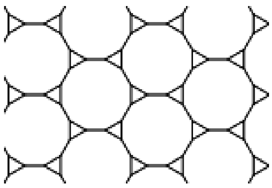
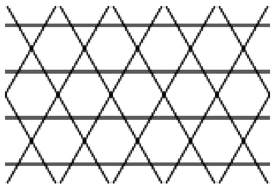
! 3

Število polpravilnih (Arhimedskih) tlakovanj ravnine je 8.

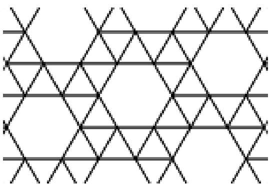
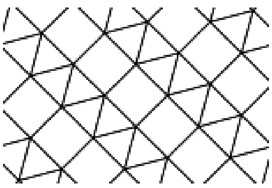
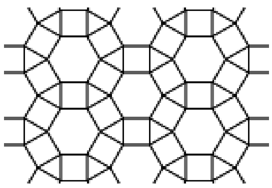
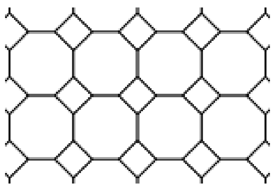
Zapiši tip tlakovanja

$$(3, 6, 3, 6), (3, 4, 6, 4), (3, 12, 12), (3, 3, 3, 4, 4), (4, 8, 8), (3, 3, 4, 3, 4), (4, 6, 12), (3, 3, 3, 3, 6)$$

pod ustrezno sliko:

__________ __________ __________ __________

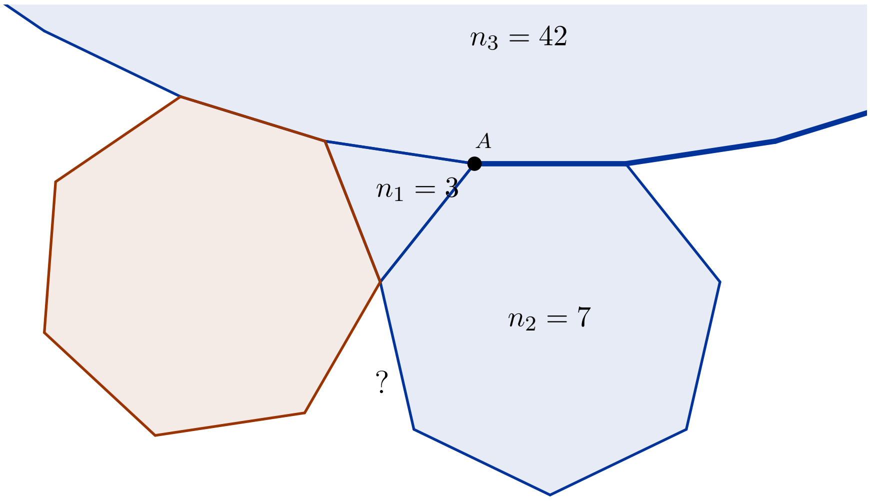
__________ __________ __________ __________

Vsa Arhimedska tlakovanja $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ *ustrezajo enačbi*

$$\frac{n_1 - 2}{n_1} + \frac{n_2 - 2}{n_2} + \ldots + \frac{n_k - 2}{n_k} \quad = \quad 2. \tag{1}$$

Preveri, ali za vseh 8 polpravilnih (Arhimedskih) tlakovanj to velja.

Pozor: Ni vsaka rešitev enačbe (1) tudi zadosten pogoj za Arhimedsko tlakovanje. Pogoj je potreben, vendar pa določa le to, da okoli vozlišča ni vrzeli. Tako je naprimer v vozlišču A *tlakovanja* $(3, 7, 42)$ *ni vrzeli (zadošča enačbi (1)), a tlakovanje ni možno, kar je očitno iz slike:*



Rešitev enačbe (1) je več in niso nujno tudi tlakovanja. Lahko jih preveriš grafično z geogebro.

Lotimo se zdaj enačbe (1) za različne vrednosti k - število likov v vozlišču.

! 4: ♠

1. *Pokaži z računom, da enačba (1) nima rešitve za $k = 2$ (t.j. ne obstajajo Arhimedska tlakovanja z natanko dvema različnima pravilnima večkotnikoma).*
2. *Pokaži, da je za $k = 3$ enačba (1)enaka*

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} \quad = \quad \frac{1}{2}. \tag{2}$$

a) Pokaži, da enačba (2) nima rešitev, če vse vrednosti imenovalcev presegajo 6.
b) enačba določa štiri tlakovanja, čeprav enačbi (2) ustrezajo trojice $(3, 7, 42)$,$(3, 8, 24)$, $(3, 9, 18)$, $(3, 10, 15)$, $(3, 12, 12)$, $(4, 5, 20)$, $(4, 6, 12)$, $(4, 8, 8)$, $(5, 5, 10)$, $(6, 6, 6)$.
Poišči ustrezne 4 in jih napiši: ______________________________

3. *Pokaži, da je za $k = 4$ enačba (1) enaka*

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} \quad = \quad 1. \tag{3}$$

Enačba določa tri tlakovanja, eno izmed njih je $(4, 4, 4, 4)$, *navedi preostali dve, če enačbo (3) rešijo še trojice* $(3, 3, 4, 12)$,$(3, 3, 6, 6)$,$(3, 4, 3, 12)$,$(3, 6, 3, 6)$,$(3, 4, 4, 6)$,$(3, 4, 6, 4)$.
Zapiši ju: ______________________________________

4. *Pokaži, da je za $k = 5$ enačba (1) enaka*

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} \quad = \quad \frac{3}{2}. \tag{4}$$

a) Če so tri vrednosti v enačbi (4) enaki 3, sta lahko preostali vrednosti imenovalcev le $3, 4$ *ali* 6.
b) Pokaži, da enačba ima tri rešitve in jih napiši: _______________________

5. *Pokaži, da je za $k = 6$ enačba (1) enaka*

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} + \frac{1}{n_6} \quad = \quad 2. \tag{5}$$

Enačba ima le eno rešitev: _______________

! 5: ♠

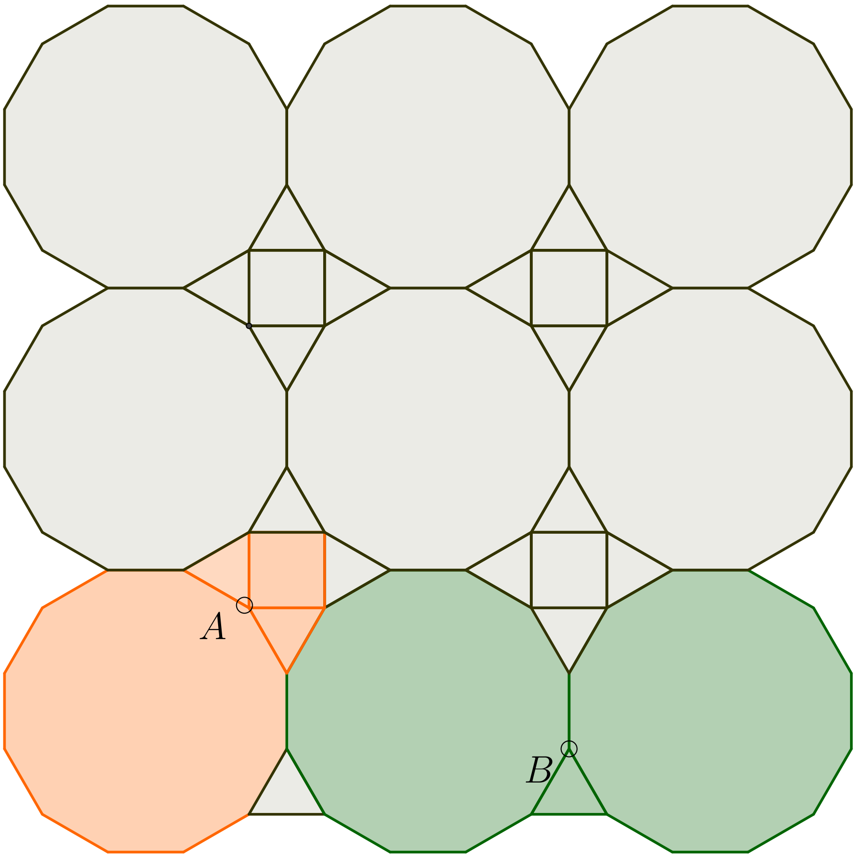
Pokaži z računom (upoštevaj vrednosti notranjih kotov), da se v enem vozlišču ne morejo stikati štirje ali več različnih pravilnih večkotnikov.

Definicija 3

Tlakovanje je reda k, če okoli vozlišč tlakovanja obstaja k različnih razporeditev likov.

Na spodnjem primeru vidimo primer tlakovanja 2 reda, t.j. tlakovanje

$$(3, 4, 3, 12)/(3, 12, 12).$$



Okoli točke A in B sta tlakovanji $(3, 4, 3, 12)$ in $(3, 12, 12)$.

V spodnji tabeli je navedeno število n tlakovanj reda k.

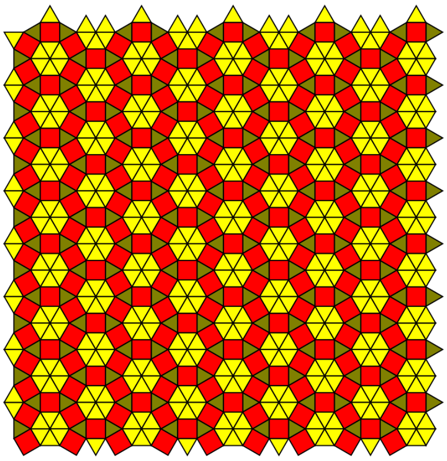
k	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
n	11	20	61	151	332	673	?	?

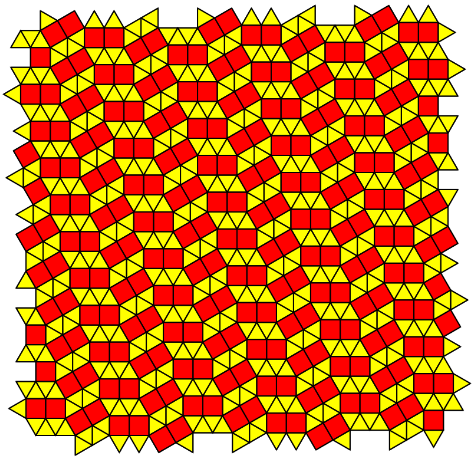
V drugem stolpcu je navedeno število tlakovanj reda 1, t.j. število vseh pravilnih in vseh polpravilnih tlakovanj, ki imajo v vsakem vozlišču tlakovanja isto razporeditev.

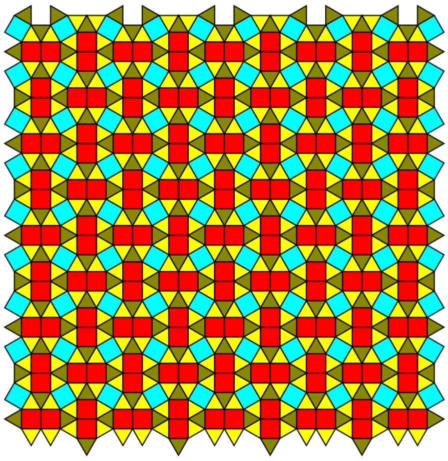
Zanimivo je, da za $k > 6$ ne vemo zaagotovo, koliko tlakovanj obstaja, za $k = 7$ smo doslej našli 7 tlakovanj.

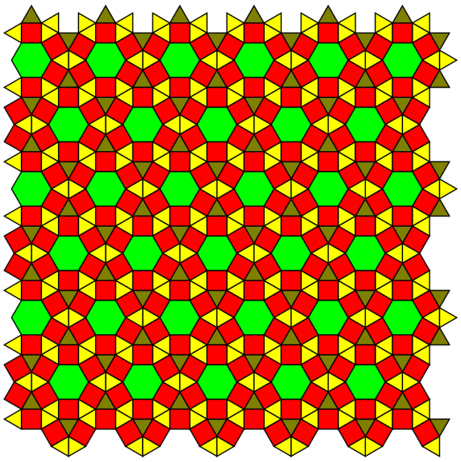
! 6

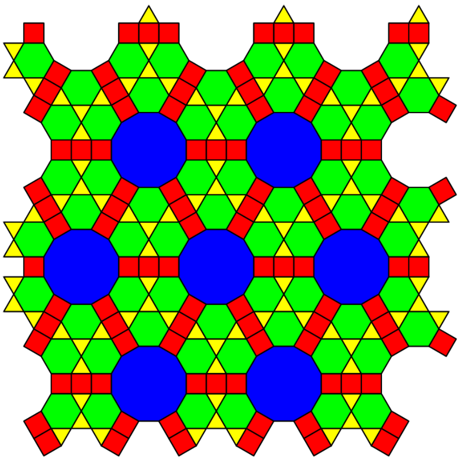
Pod spodnje primere zapiši tip tlakovanja:

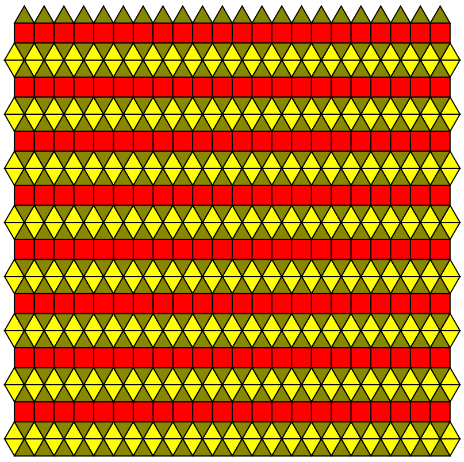


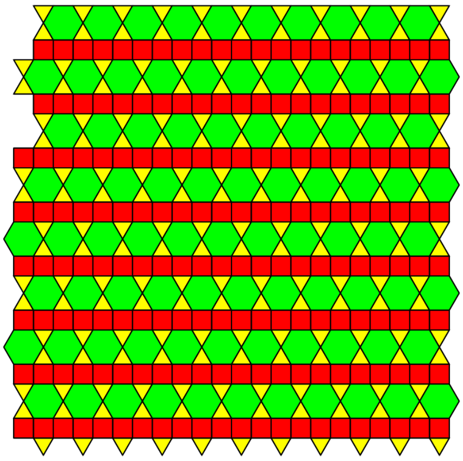


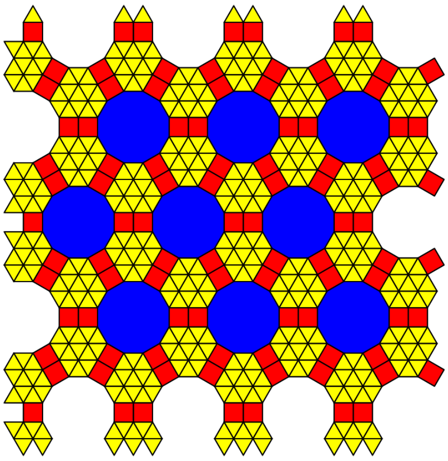


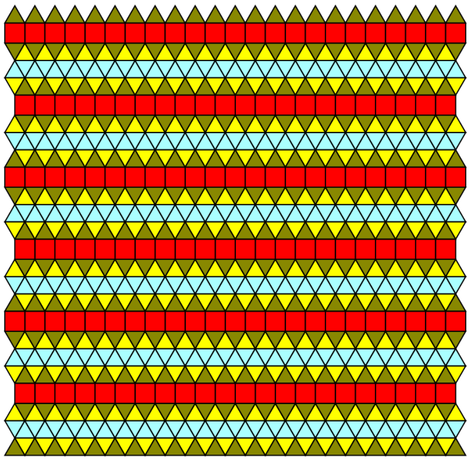






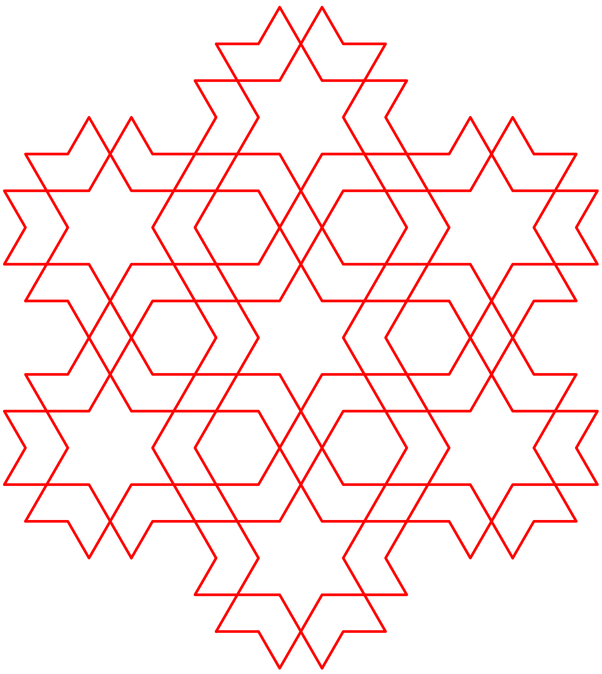




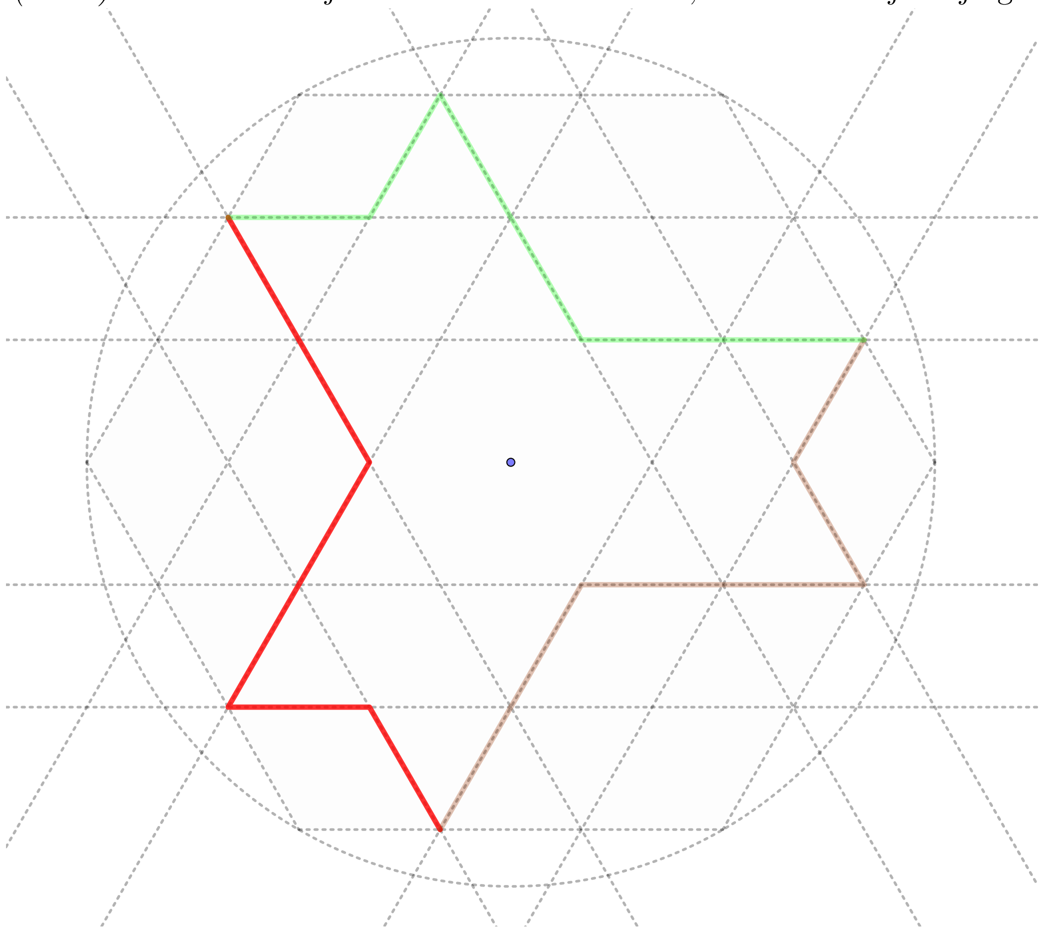


Mošeja Sultan Ahmed - modra mošeja

Verjetno najbolj obiskana mošeja v Istanbulu ima na tleh vhoda zanimiv vzorec tlakovanja:



V osnovi je vzorec porojen iz heksagonalnega tlakovanja, ki jo sestavljajo pravilni šestkotniki. Vsako stranico lika razdelimo na tretjine, skozi te točke potegnemo vzporednice s preostalimi stranicami. Na teh premicah leži lomljenka(rdeča). Z dvemi vrtenji dobimo nekakšno zvezdo, ki bo v nadaljevanju generator vzorca.

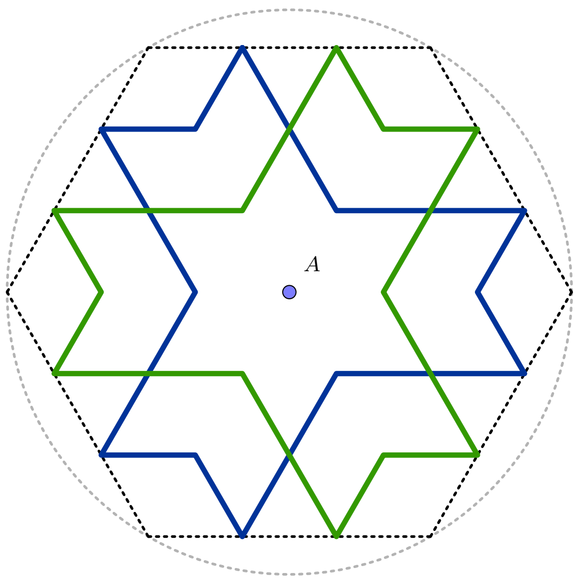


! 7

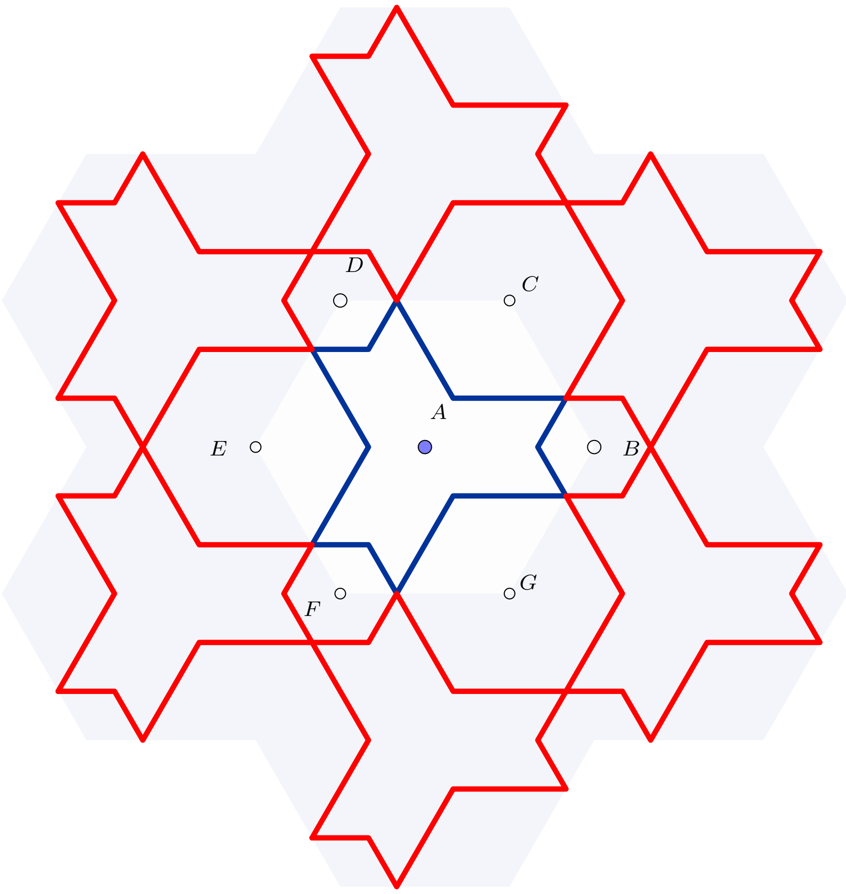
Ugotovi, za kakšni rotaciji gre:

R_1:______________________________ R_2:______________________________

Za celoten vzorec pa moramo ponovno zavrteti (modro) zvezdo na način, da dobimo z vrtenjem zeleno. Opiši rotacijo. R_3:______________________________



V naslednji fazi narisano sklenjeno modro lomljenko zavrtimo še šestkrat na način, da dobimo vzorec, ki že bolj spominja na končni izdelek.



! 8

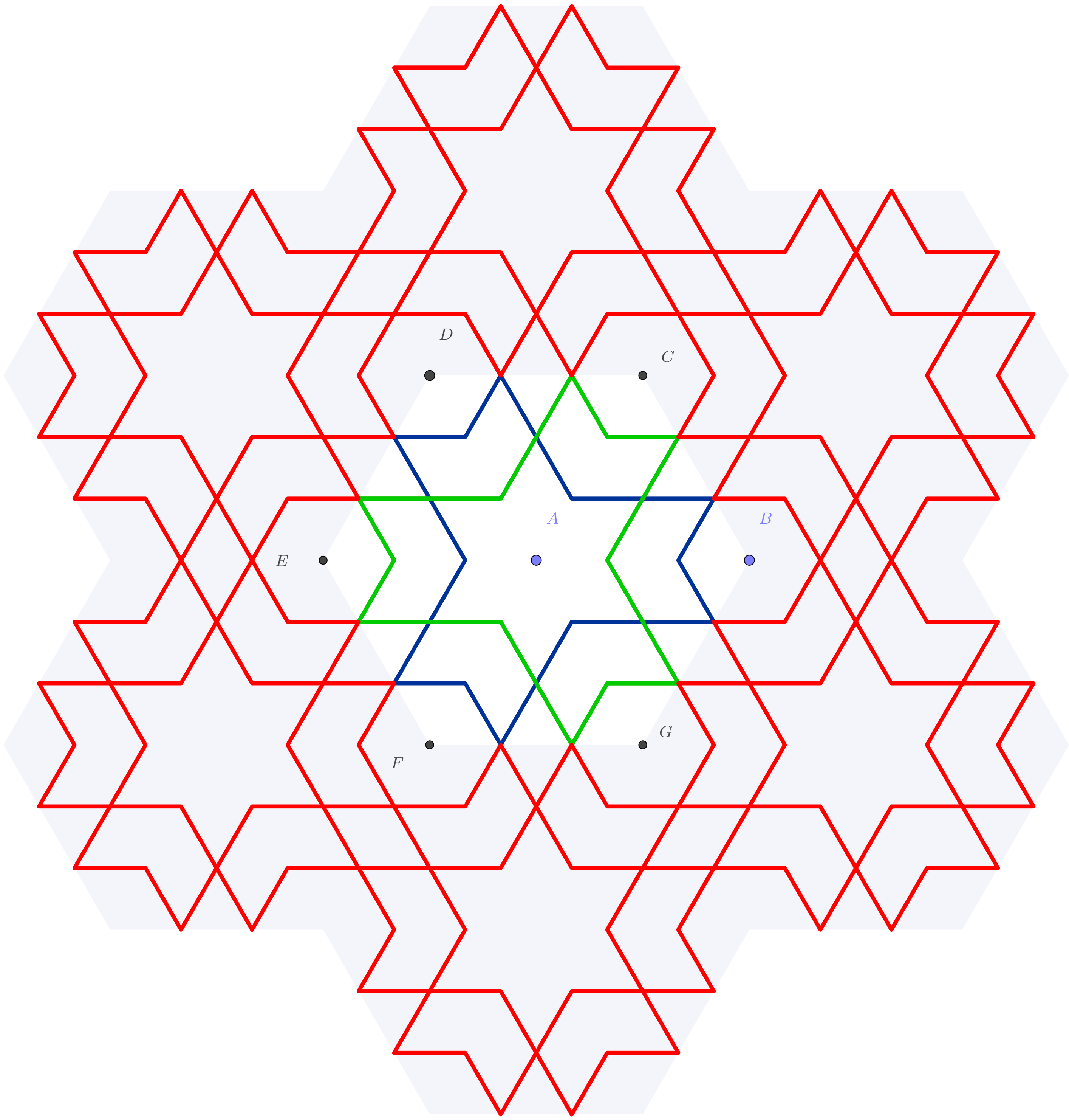
Opiši, kako dobimo posamezne rdeče dele vzorca.

____

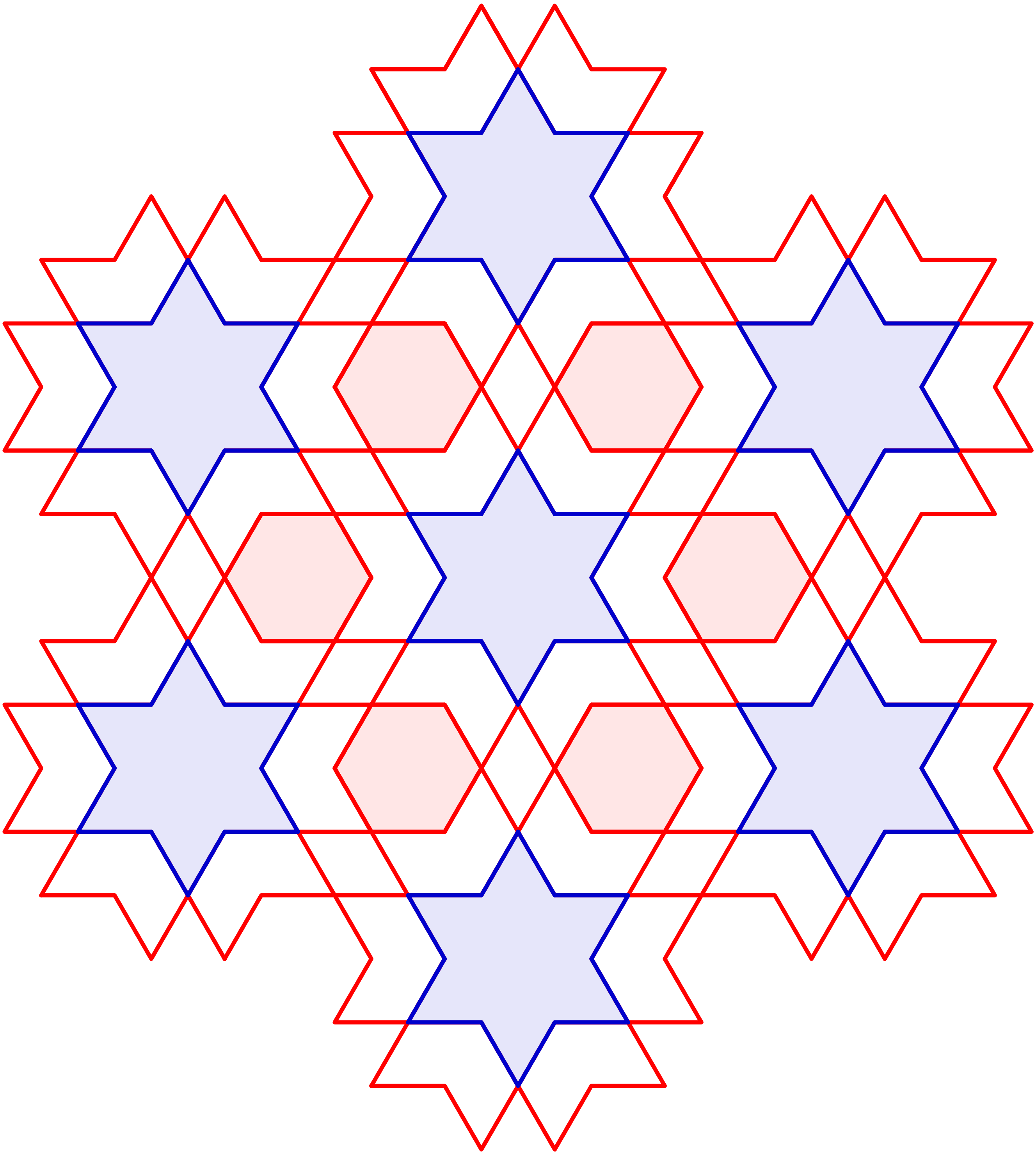
____

____

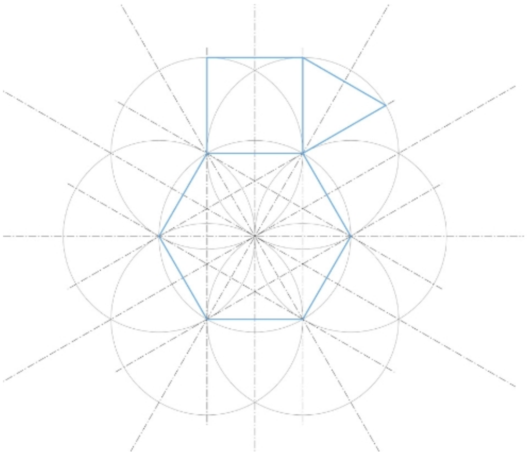
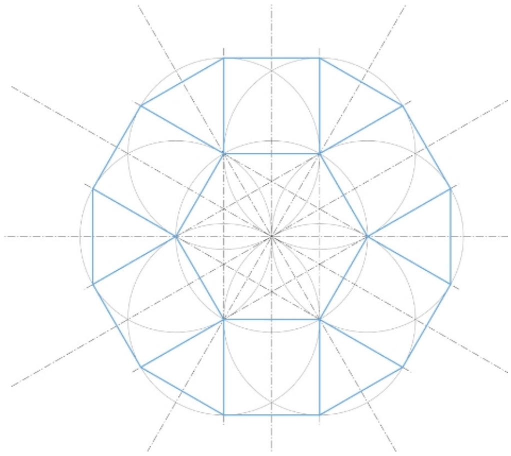
Če to naredimo še z zeleno zvezdo, dobimo željen vzorec.



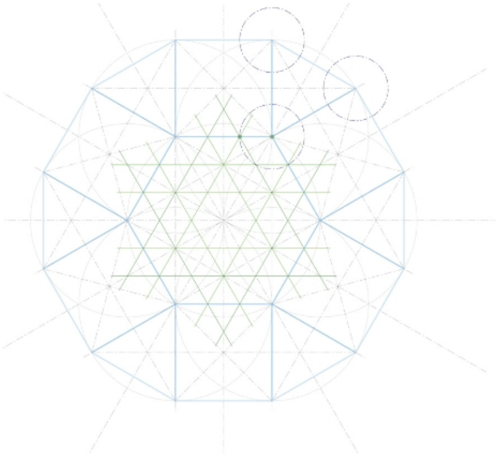
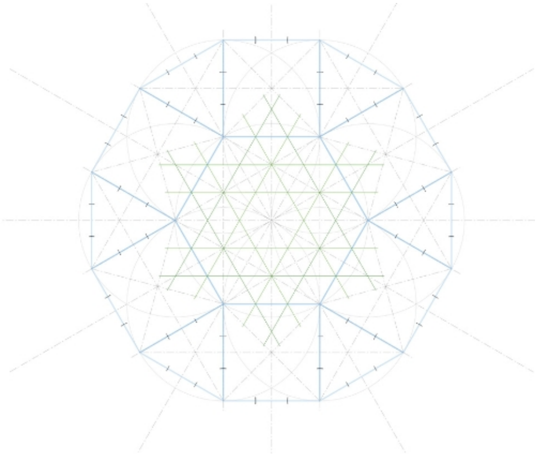
Ko simetrična območja ustrezno obarvamo, dobi vzorec bogatejšo podobo...



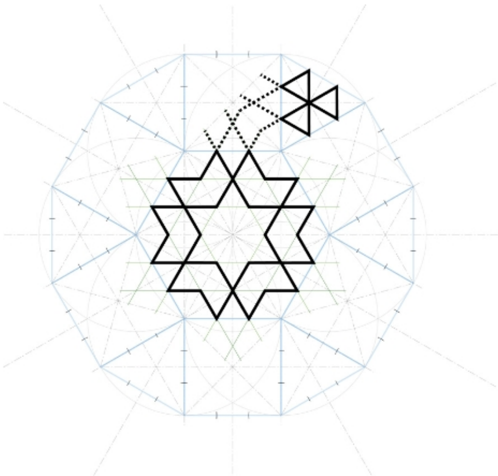
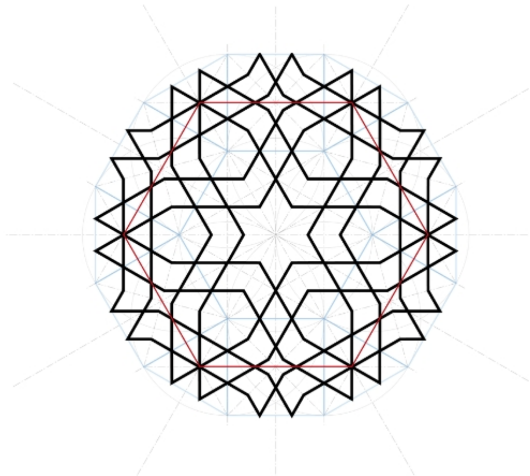
Vzorec tlakovanja na tleh modre mošeje je le eden od možnih tlakovanj,ki ga dobimo z geometrijsko konstrukcijo s trikotniki, šestkotniki in kvadrati in temelji na polpravilnem tlakovanju:

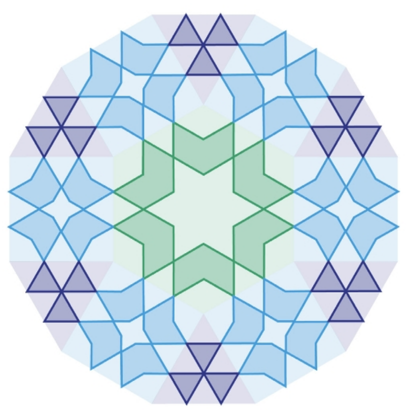
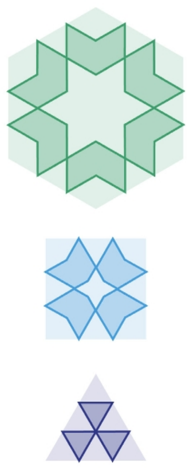
Začnemo s konstrukcijo pravilnega šestkotnika, kateremu izmenično orišemo trikotnik in kvadrat, tlakovanje $(3, 4, 6, 4)$.

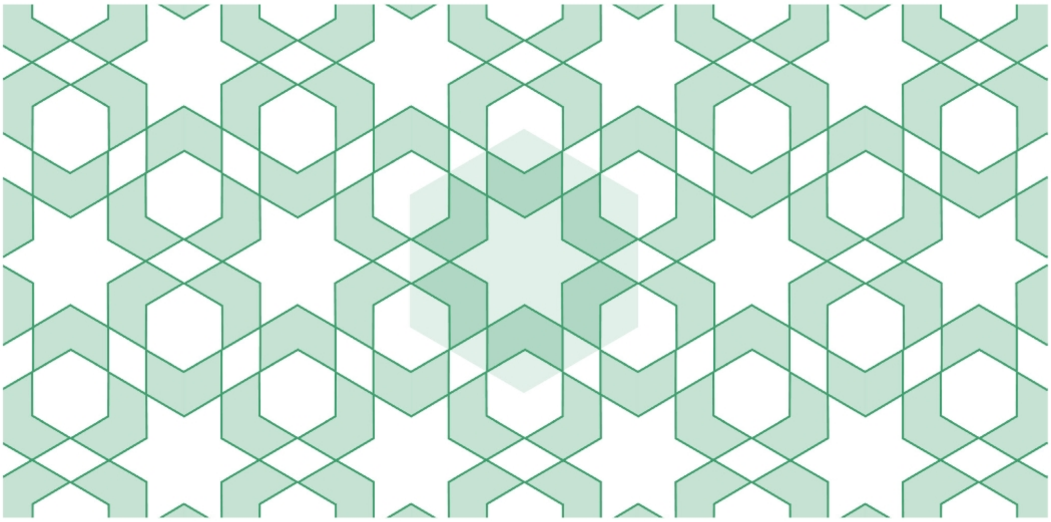
Stranice likov razdelimo na tretjine.

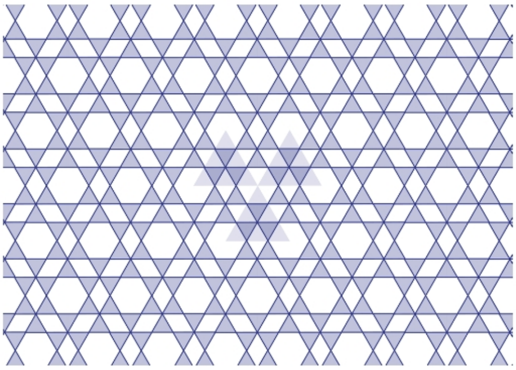
S pomočjo točk narišemo vzorec. Nekaj pozornosti zahteva del znatraj kvadrata, kjer krivuljo določajo nosilke stranic trikotnikov in sredinskega dela...

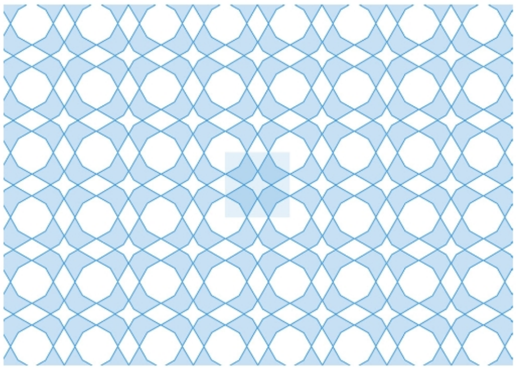



Če območje razrežemo na šestkotnike, kvadrate in trikotnike, dobimo tri osnovne gradnike, s katerimi lahko na različne načine tlakujemo ravnino.

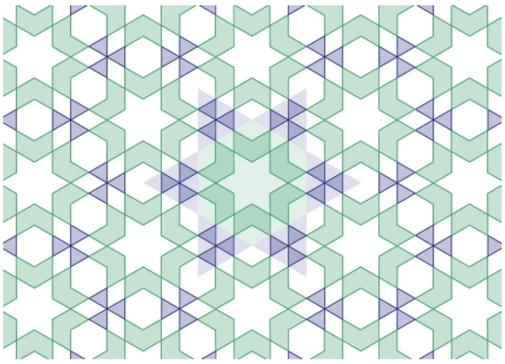


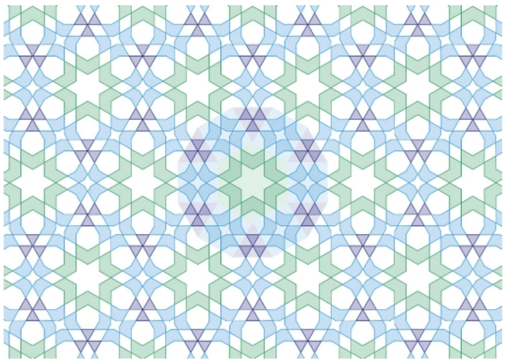
Šestkotniki skupaj tvorijo tlakovanje Sultana Ahmeda.





Trikotniki in kvadrati pa . . .





Estetsko pa so veliko bolj zanimive možnosti, kjer se tlakovci kombinirajo med sabo (šestkotno - trikotni in šestkotno -trikotno - kvadratni). . .

Mošeja Rustem Paša

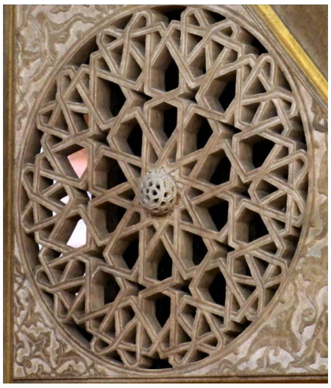
Mošeja se nahaja v četrti Eminonu, na južni strani zaliva Golden Horn nasproti avtobusne postaje. Izhaja iz 16. stoletja, v kupoli pa zasledimo razporeditev v obliki pravilnega 24-kotnika.

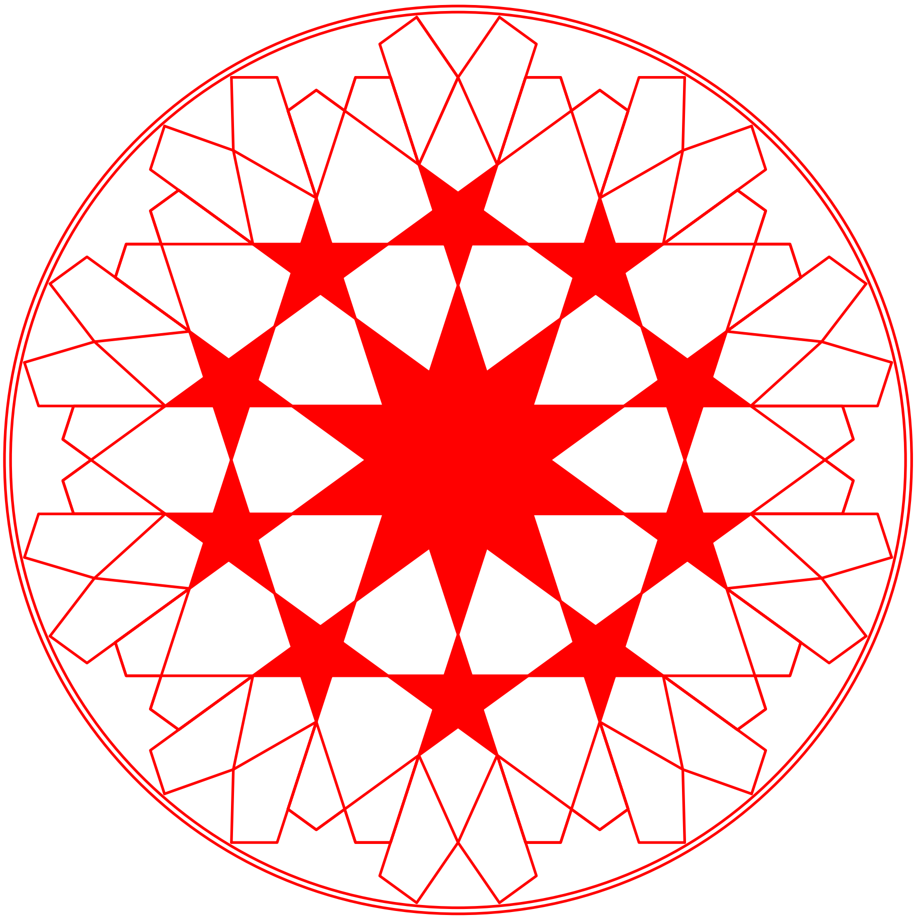
! 9

Kako narišemo pravilni 24-kotnik?

Zanimiv je medaljon, ki se nahaja na stopnišču v mošeji:

Osnova je pravilni desetkotnik, iz katerega izhajajo zvezde in ornamenti ob krožnici.





! 10

Na spletnem naslovu `https://symmetrica.files.wordpress.com/2015/01/sketch_17.pdf` *preuči konstrukcijo in jo nariši Geogebri.*

! 11

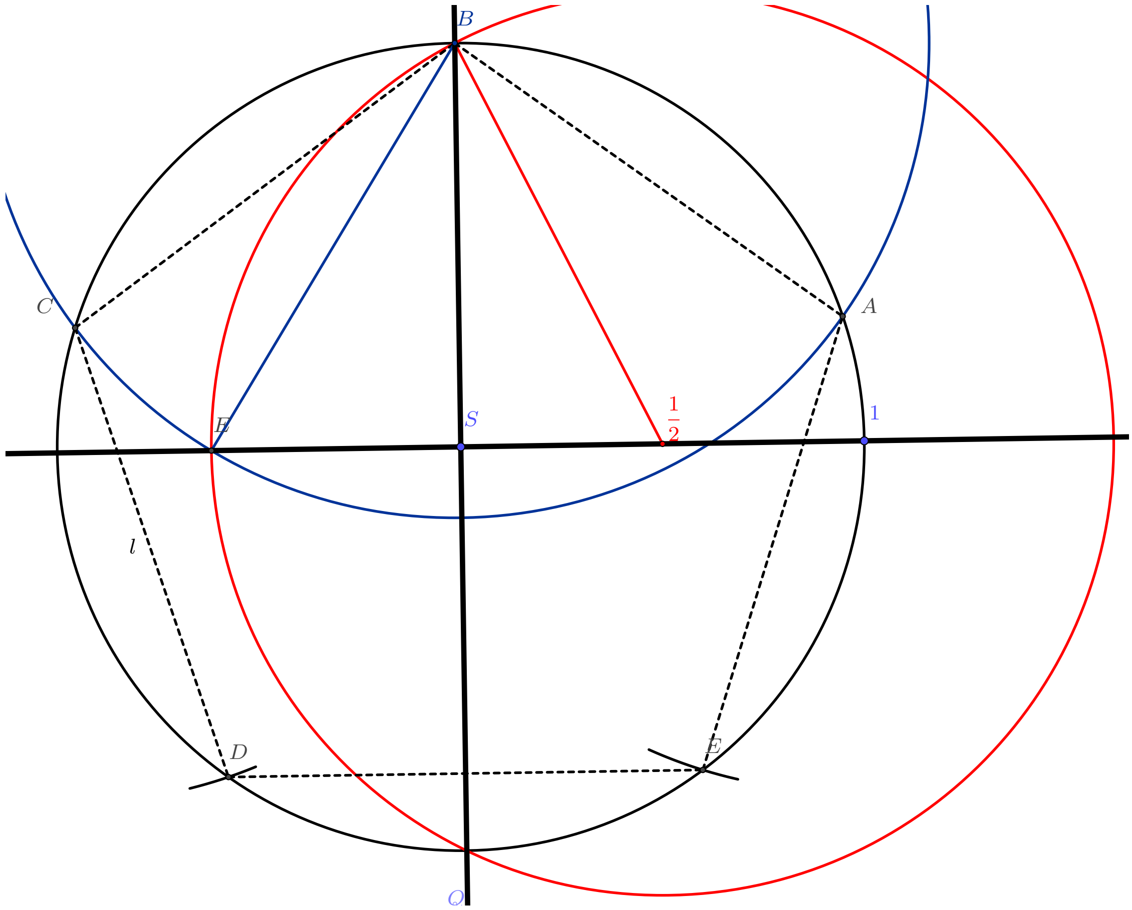
Kako narišemo pravilni petkotnik in desetkotnik s šestilom in ravnilom?

a) Kot med diagonalo in stranico pravilnega petkotnika meri ____________________.

b) Poišči v pravilnem petkotniku en par podobnih trikotnikov in izračunaj dolžino diagonale.

c) Najdi povezavo med dolžino stranice, diagonale in polmerom očrtanega kroga.

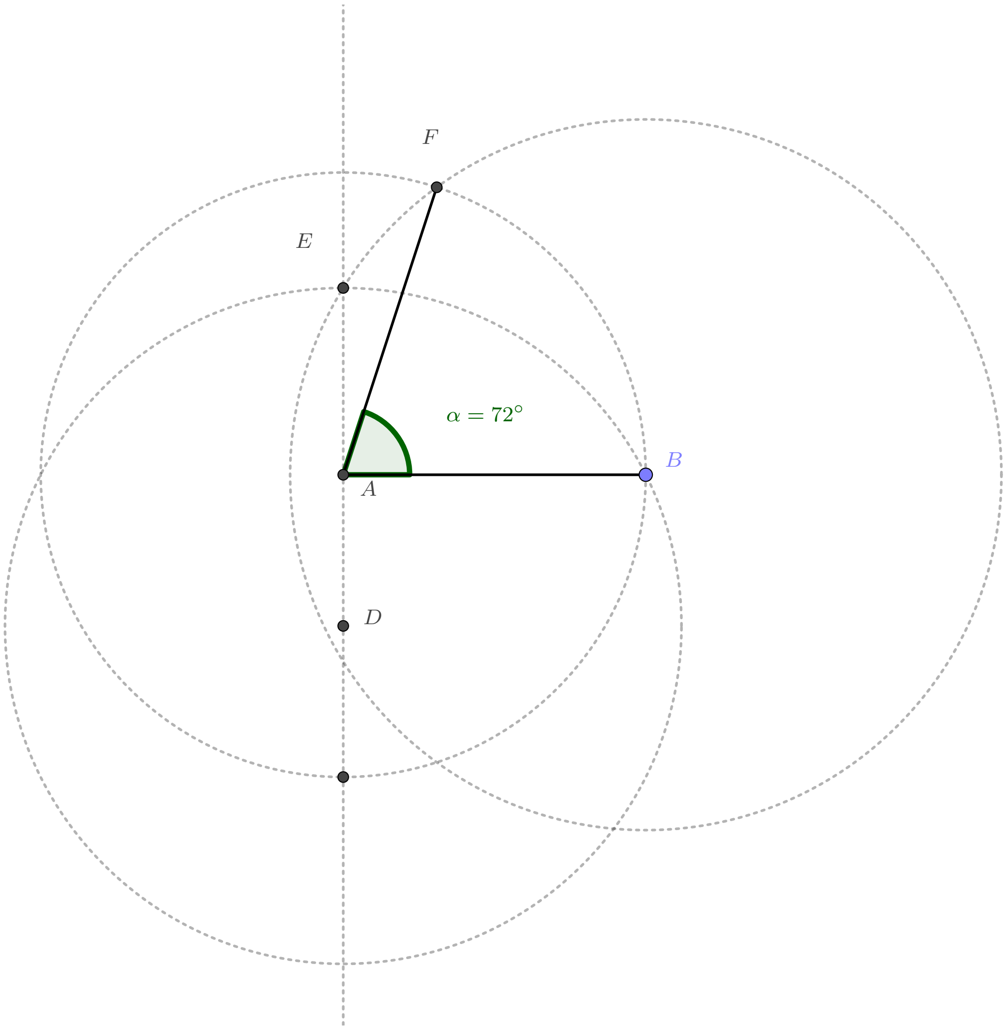
Naj bo v pomoč konstrukcija pravilnega petkotnika:



! 12

S šestilom in ravnilom skonstruiraj pravilni petkotnik in mu nariši vseh pet diagonal. Znotraj lika razišči podobnost trikotnikov.

...in še konstrukcija kota 72°:



! 13

Palača Topkapi

! 14

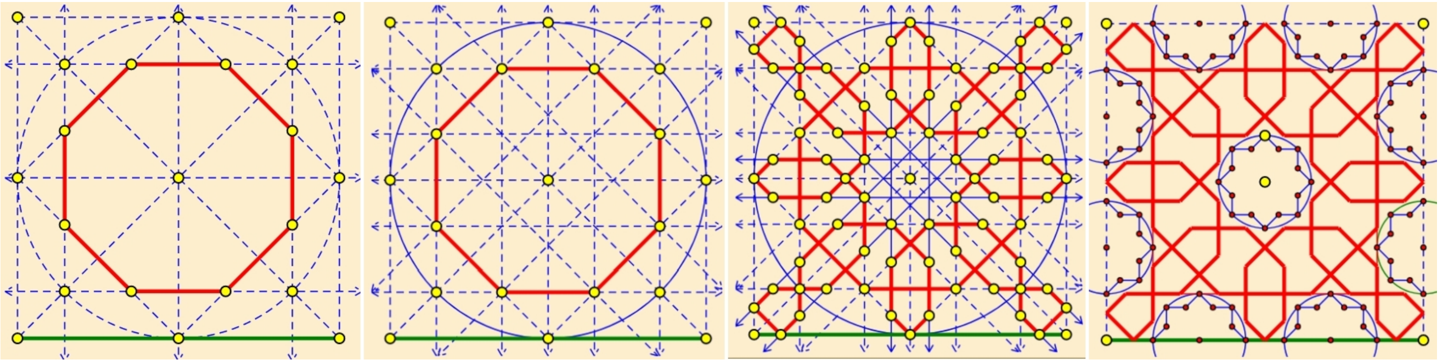
Kateremu tlakovanju ustreza vzorec na steni palače? Poišči vzorec v palači.

Mošeja Sultan Beyezid

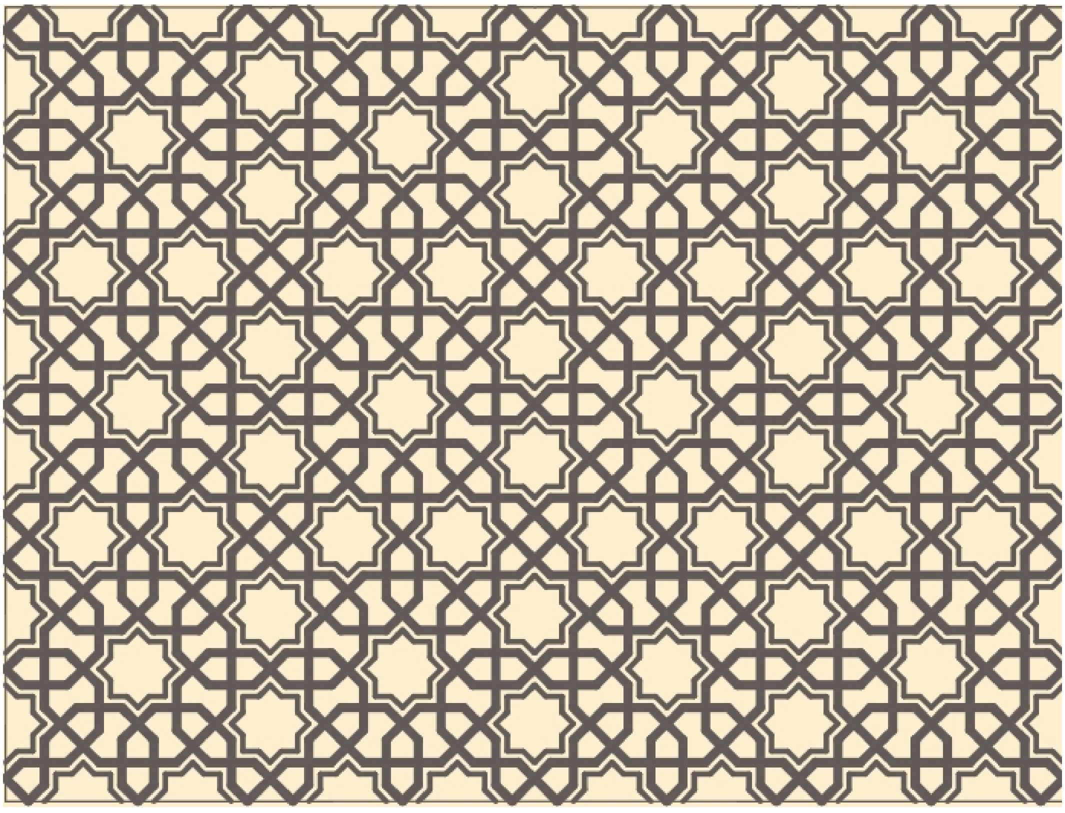
! 15

Mošeja, ki se nahaja zahodno od Velikega Bazarja, je z matematičnega vidika zelo zanimiva. Poišči vzorec na mošeji:

Osnova je pravilni osemkotnik in kvadrat, podrobnosti so razvidne iz slike.



Končni vzorec dobimo, če združimo skupaj več enot:

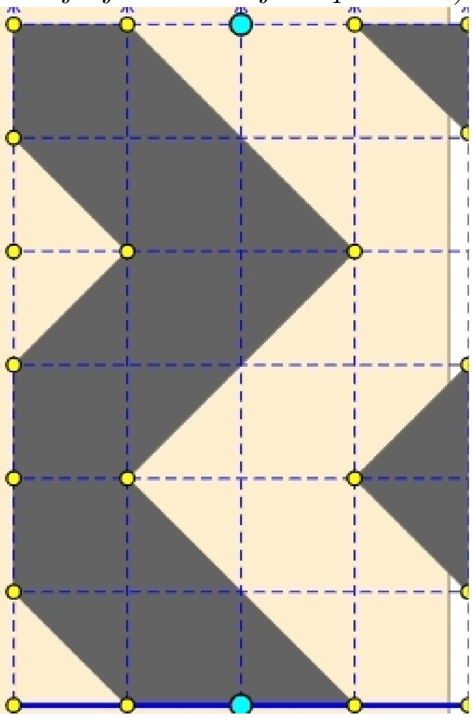


Dodatne naloge

! 16

Na mošeji Sultan Beyezid najdemo tudi poseben vzorec:

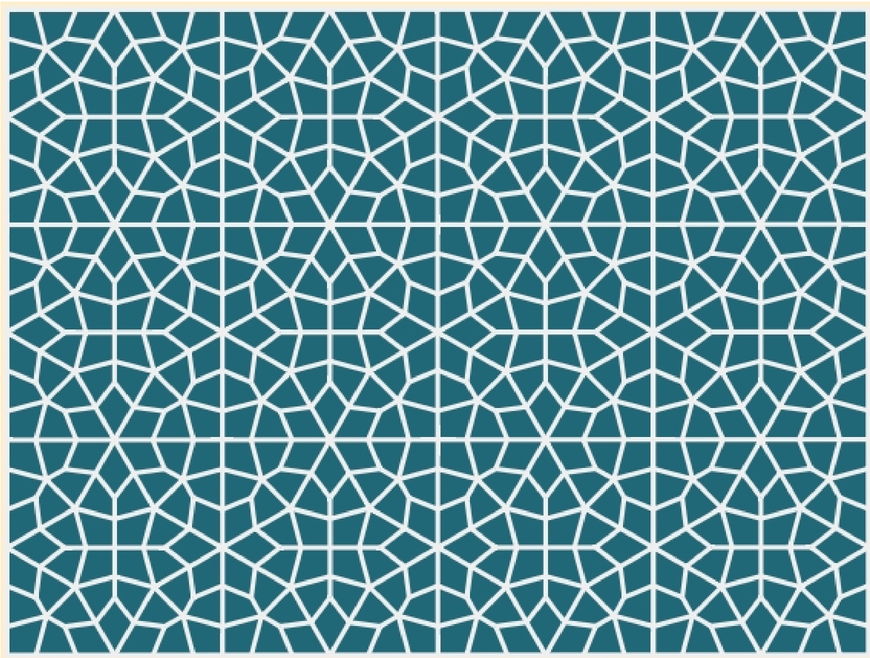
Osnovni gradnik in končni izdelek. Razmisliti je potrebno, kako pridemo do zaključnega vzorca (kakšna zrcaljenja ali rotacije so potrebne).

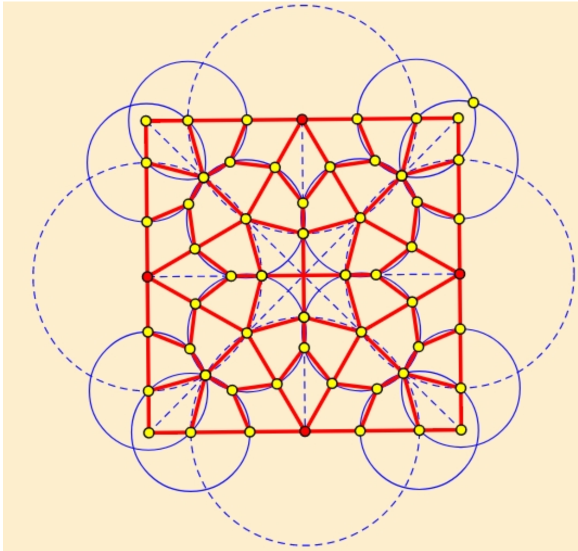


V pomoč ti naj bo vir na `https://symmetrica.files.wordpress.com/2015/01/sketch_15.pdf`.

! 17

V modri mošeji najdemo številne vzorce. Eden, ki se nahaja tudi v palači Topkapi:

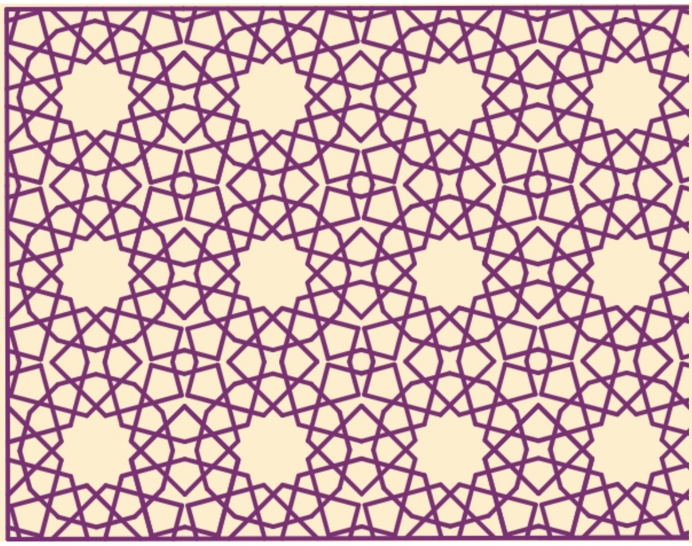




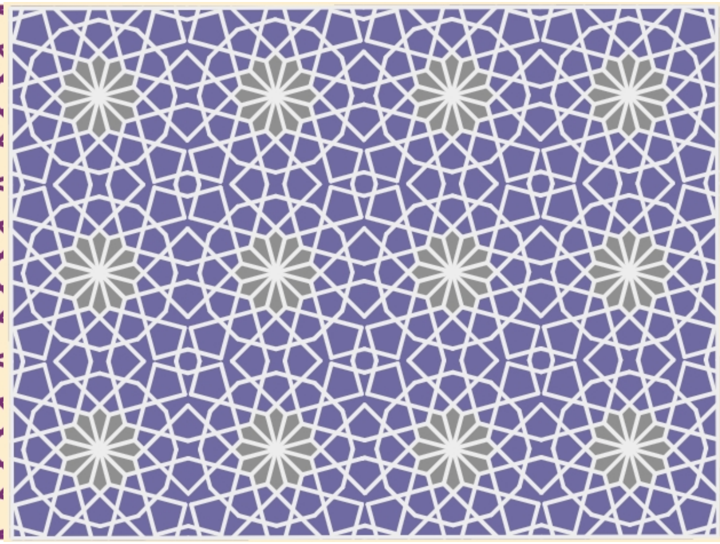
Poskušaj narisati vzorec z Geobebro.

! 18

V Hagii Aya Sophii zasledimo zvezde, katerih osnova konstrukcije je pravilni dvanajstkotnik.

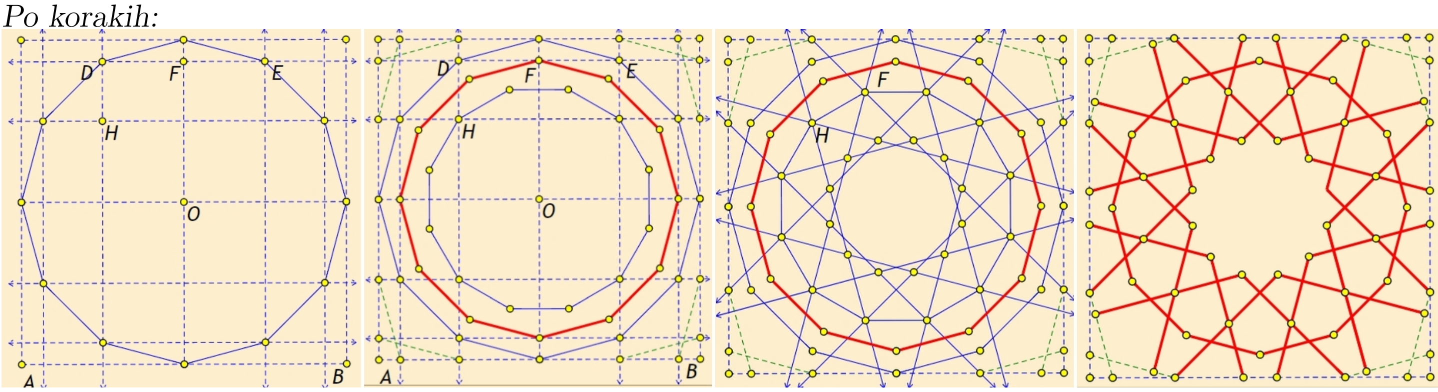


Konstrukcija



Varianta v Aya Sofii.

Po korakih:



Viri:

1. `https://symmetrica.wordpress.com`
2. `https://hrcak.srce.hr/file/143611`
3. `https://sl.wikipedia.org/wiki/Teselacija`