

Eksponentna rast prebivalstva: od bakterij do Zemlje

Seminarska naloga pri matematiki

Ime in priimek dijaka, 3. letnik | Šolski center Krško–Sevnica

Mentor: ime priimek | Krško, 2026

Snov: eksponentna funkcija (poglavje 16 – Matematika na maturi, cilji)

Uvod

Leta 1798 je angleški duhovnik in ekonomist **Thomas Robert Malthus** objavil delo *An Essay on the Principle of Population*, v katerem je opozoril na preprosto, a nemirujočo idejo: če prebivalstvo raste *eksponentno*, viri, ki ga hranijo, pa le *linearno*, se prej ali slej zgodi kriza. Vprašanje, ali se stvari v naravi in pri človeku res množijo eksponentno – in kaj to pomeni za prihodnost –, je aktualno še danes, ko govorimo o prenaseljenosti, podnebnih spremembah in omejenih virih.

V tej nalogi bom pokazal(a), kako eksponentna funkcija opiše rast populacij v naravi, jo uporabil(a) za oceno rasti svetovnega prebivalstva in preveril(a), ali taka napoved drži tudi na dolgi rok – ter na koncu predstavil(a) Malthusovo teorijo in njene meje.

Jedro

Matematični model

Populacijo, ki raste s stalno stopnjo rasti r na časovno enoto, opišemo z eksponentno funkcijo

$$N(t) = N_0 \cdot (1 + r)^t \quad \text{oz. zvezno} \quad N(t) = N_0 \cdot e^{rt},$$

kjer je N_0 začetno število osebkov, t pa preteklo časovno obdobje. Pogosto nas zanima **podvojitveni čas** t_2 – čas, v katerem se populacija podvoji:

$$N_0 \cdot e^{rt_2} = 2N_0 \Rightarrow t_2 = \frac{\ln 2}{r} \approx \frac{0,693}{r}.$$

Primeri iz narave

- **Bakterije.** Bakterija *E. coli* se v ugodnih razmerah podvoji približno vsakih 20 minut. Iz ene same bakterije bi po 8 urah (480 minutah, torej $480/20 = 24$ podvojitvah) nastalo

$$N = 1 \cdot 2^{24} \approx 16,8 \text{ milijona bakterij.}$$

Brez omejitev (prostor, hrana) bi taka kultura v enem samem dnevu presegla maso Zemlje – kar seveda pokaže, da v resnici prej ali slej nekaj rast ustavi.

- **Zajci v Avstraliji.** Leta 1859 je bilo v Avstralijo prineseno le 24 divjih zajcev. Ker tam niso imeli naravnih sovražnikov, se je populacija v manj kot desetih letih razrasla na več deset milijonov – eden najbolj znanih primerov nemotene eksponentne rasti v naravi.
- **Cvetenje alg.** Ob obilju hranil (npr. dušika iz gnojil, ki odteče v jezero) se alge razmnožujejo eksponentno in v nekaj dneh prekrijejo celotno vodno površino, kar zaduši ostalo življenje v vodi.

Rast svetovnega prebivalstva

Svetovno prebivalstvo je v zadnjih dveh stoletjih naraščalo takole: 1 milijarda (1804), 2 mrd (1927), 3 mrd (1960), 4 mrd (1974), 5 mrd (1987), 6 mrd (1999), 7 mrd (2011), 8 mrd (2022). Med letoma

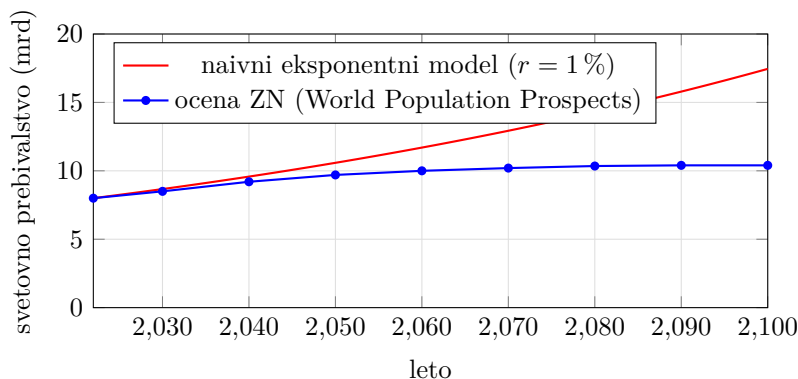
1960 in 1999 se je prebivalstvo natanko podvojilo (iz 3 na 6 mrd) v 39 letih, kar pomeni letno stopnjo rasti

$$r = \frac{\ln 2}{39} \approx 0,0178 = 1,78 \, \%.$$

Kaj pa napoved? Če bi to stopnjo ($r \approx 1 \, \%$, kolikor znaša ocenjena *trenutna* globalna rast) preprosto uporabili tudi za prihodnost, bi za leto 2100 (78 let po letu 2022, ko je bilo 8 mrd ljudi) dobili

$$N(2100) = 8 \cdot e^{0,01 \cdot 78} \approx 8 \cdot 2,18 \approx 17,4 \text{ milijarde.}$$

Združeni narodi (*World Population Prospects 2022*) pa za leto 2100 napovedujejo le okoli **10,4 milijarde** – torej precej manj. Slika 1 to razliko lepo pokaže.



Slika 1: Primerjava naivnega eksponentnega modela z oceno Združenih narodov.

Razlog za odstopanje je, da stopnja rasti r pri ljudeh *ni* konstantna, kot smo predpostavili: z gospodarskim razvojem, izobrazbo (predvsem žensk) in dostopnostjo kontracepcije se rodnost zniža – pojav imenujemo **demografski prehod**. Eksponentni model je torej dober približek na kratek rok, na dolgi rok pa ga je treba nadomestiti z modelom, kjer se r s časom zmanjšuje (npr. z logistično funkcijo, ki pa presega gimnazijsko snov).

Malthusova past

Malthus je trdil, da prebivalstvo raste **geometrijsko** (eksponentno): $1, 2, 4, 8, 16, \dots$, pridelava hrane pa le **aritmetično** (linearno): $1, 2, 3, 4, 5, \dots$. Tabela 1 to ponazori na sedmih „generacijah“.

generacija n	prebivalstvo $P_n = 2^n$	hrana $F_n = n + 1$	razmerje P_n/F_n
0	1	1	1,0
1	2	2	1,0
2	4	3	1,3
3	8	4	2,0
4	16	5	3,2
5	32	6	5,3
6	64	7	9,1

Tabela 1: Geometrijska rast prebivalstva proti aritmetični rasti hrane.

Razmerje P_n/F_n narašča vse hitreje – ravno to je „Malthusova past“: prebivalstvo prej ali slej preraste svoje vire, kar po Malthusu vodi v lakoto, bolezni ali vojne, ki populacijo spet zmanjšajo.

Zaključek

Eksponentna funkcija zelo dobro opiše rast v idealnih razmerah – pri bakterijah, pri zajcih brez plenilcev, pri algah ob obilju hranil, pa tudi pri človeku na krajših časovnih obdobjih (npr. 1960–1999). Na dolgi rok pa noben resničen sistem ne raste eksponentno v nedogled, ker mu prej ali slej zmanjka prostora, hrane ali drugih virov – kar so pokazali tako izračun za bakterijsko kulturo kot primerjava z napovedjo ZN za leto 2100.

Malthus je s tem, ko je opozoril na neskladje med (eksponentno) rastjo prebivalstva in (linearno) rastjo virov, postavil pomembno vprašanje, ki je še danes v ospredju razprav o trajnostnem razvoju. Ni pa predvidel, kako močno lahko tehnološki napredek (npr. „zelena revolucija“ v kmetijstvu 20. stoletja) poveča razpoložljive vire in s tem odloži ali omili „past“. Sama Malthusova past se torej (še) ni uresničila v takšni obliki, kot jo je opisal, njegov temeljni matematični vpogled – da eksponentna rast prej ali slej trči ob omejene, kvečjemu linearno rastoče vire – pa ostaja veljaven in uporaben tudi zunaj demografije, na primer pri porabi naravnih virov ali širjenju epidemij.

Literatura

- Malthus, T. R. (1798). *An Essay on the Principle of Population*. London: J. Johnson.
- United Nations, Department of Economic and Social Affairs, Population Division (2022). *World Population Prospects 2022: Summary of Results*.
- Our World in Data – <https://ourworldindata.org/world-population-growth> (dostop: 2026).
- Učbenik za matematiko, 3. letnik gimnazije – poglavje o eksponentni funkciji.