

Matematične seminarske in raziskovalne naloge

Navodila in predlogi tem za gimnazijo

Šolski center Krško–Sevnica

Kazalo

1	Raziskovalna naloga	2
1.1	Navodila za izdelavo	2
1.2	Predlogi naslovov po področjih	3
2	Seminarska naloga	5
2.1	1.–2. letnik	5
2.2	3.–4. letnik	7

1 Raziskovalna naloga

Raziskovalna naloga je namenjena dijakom, ki si želijo večjega izziva: gre za obsežnejšo, samostojno nalogo (10–15 strani), v primerjavi s krajšo seminarsko nalogo (do 3 strani), ki je predstavljena v razdelku 2.

1.1 Navodila za izdelavo

Struktura naloge

1. **Naslovna stran** – ime šole, predmet (matematika), naslov naloge, ime in razred dijaka, mentor, kraj in datum.
2. **Kazalo vsebine** – avtomatsko generirano kazalo s stranmi.
3. **Uvod** (pribl. pol strani do ene strani) – zakaj je dijak izbral to temo, kaj je namen/cilj naloge (raziskovalno vprašanje), kratek pregled vsebine.
4. **Osrednji (jedrni) del** – glavnina naloge:
 - teoretična osnova: definicije, izreki, dokazi (prilagojeni gimnazijski ravni);
 - lastni rešeni primeri – ne le prepisana teorija, ampak dijakov lasten prikaz razumevanja;
 - po možnosti praktični/uporabni del: povezava s stroko, vsakdanjim življenjem ali drugim predmetom;
 - grafi, skice, slike (GeoGebra, Desmos, Excel), vse oštevilčene in poimenovane;
 - če je smiselno, kratek zgodovinski oris pojma ali matematika, ki ga je odkril.
5. **Zaključek** – strnjen povzetek ugotovitev, lasten razmislek (kaj je dijak izvedel, kje so bile težave, kaj bi raziskal naprej).
6. **Viri in literatura** – enoten citatni slog (npr. APA), ločeno knjige in spletni viri (z datumom dostopa); vsak prevzet podatek, slika ali trditev ima naveden vir.
7. **Priloge** (po potrebi) – dodatni izračuni, izpeljave, podatkovne tabele, izvorna koda.

Oblikovanje

- Obseg: običajno 10–15 strani vsebine (brez naslovnice, kazala in prilog).
- Pisava: Times New Roman 12 pt ali Arial 11 pt, razmik vrstic 1,5.
- Enačbe urejene z urejevalnikom enačb (Word Equation, $\text{\LaTeX}$) – ne kot slike, če se le da.
- Strani oštevilčene; slike in tabele naslovljene ter oštevilčene (npr. „Slika 3: ...“).

Nasveti za kakovostno nalogo

- Tema naj bo dovolj ozka, da jo je mogoče poglobljeno obdelati na 10–15 straneh.
- Vključi vsaj en izviren, samostojno rešen primer ali problem.
- Pokaži povezavo matematike z realnim svetom, drugo stroko ali zgodovino.
- Dokaze prilagodi ravni gimnazije: poudarek na razumevanju ideje, ne na formalni strogosti.
- Uporabi vizualizacije (grafi, geometrijske skice) povsod, kjer pomagajo razumevanju.
- Naloga naj se konča z lastnim zaključkom, ne le s „prepisanim“ povzetkom vira.

Okviren časovni potek

1. Izbira in potrditev teme pri mentorju.
2. Zbiranje virov in literature.
3. Izdelava grobega osnutka (struktura + jedro).
4. Pregled pri mentorju, popravki.
5. Izdelava končne različice.
6. Priprava na ustno predstavitev/zagovor (če je predviden).

1.2 Predlogi naslovov po področjih

Zgodovina matematike

- Zlati rez skozi zgodovino, naravo in umetnost
- Fibonaccijevo zaporedje in njegova uporaba v naravi
- Pitagorov izrek: različni dokazi skozi zgodovino
- Zgodovina in izračun števila π
- Nastanek neevklidskih geometrij
- Kriptografija skozi zgodovino – od Cezarjeve šifre do RSA

Algebra

- Kompleksna števila in njihova uporaba v elektrotehniki
- Reševanje enačb 3. in 4. stopnje (Cardano, Ferrari)
- Matrike pri reševanju sistemov linearnih enačb
- Polinomi in Hornerjev algoritem
- Uvod v teorijo grup na preprostih primerih

Geometrija

- Platonska telesa in njihove lastnosti
- Fraktali – geometrija narave
- Zlati rez v arhitekturi
- Trigonometrija in triangulacija v navigaciji/GPS
- Stožnice (elipsa, parabola, hiperbola) in njihova uporaba
- Neevklidske geometrije – kaj se zgodi, če Evklidov 5. postulat ne velja

Matematična analiza

- Odvod pri reševanju optimizacijskih problemov (npr. najmanjša poraba materiala)
- Uporaba integralov pri izračunu površin in prostornin vrtenin
- Zenonovi paradoksi in pojem limite
- Diferencialne enačbe pri modeliranju rasti populacij
- Taylorjeva vrsta in aproksimacija funkcij

Verjetnost in statistika

- Verjetnost pri igrah na srečo (kocke, karte, loto)
- Statistična analiza podatkov (npr. rezultati dijakov, športni podatki)
- Bayesov izrek in njegova uporaba (npr. medicinsko testiranje)
- Slučajni sprehodi (random walk)
- Zakon velikih števil na simulacijah

Diskretna matematika in kombinatorika

- Teorija grafov in problem štirih barv
- Pascalov trikotnik in binomski izrek
- Osnove teorije iger
- Problem trgovskega potnika

Uporabna matematika

- Matematika v kriptografiji in varnosti podatkov
- Obrestno obrestovanje in matematika financ
- Matematika v računalniški grafiki
- Matematika glasbe – frekvence, harmonija, intervali
- Matematični modeli širjenja epidemij (SIR model)
- Matematika pri gradnji mostov in zgradb
- GPS in matematika trilateracije

Teorija števil

- Praštevila in njihova vloga v kriptografiji
- Popolna in prijateljska števila
- Diofantske enačbe
- Modularna aritmetika in njena uporaba

Dijak se usmeri glede na njegov interes (npr. šport, glasba, računalništvo, ekonomija) – tako je motivacija za samostojno delo večja, naloga pa bolj izvirna.

2 Seminarska naloga

Kratka seminarska naloga (do 3 strani, L^AT_EX/Overleaf) – strogo se drži naslova in uporablja samo formule, obravnavane v gimnaziji. Struktura: uvod (situacija, zgodovina/kontekst) – jedro (matematično ozadje in konkreten izračun) – zaključek (ugotovitve) – literatura. Dijak lahko pri pisanju uporabi AI kot pomoč, vsebinsko pa mora ostati tesno vezan na izbrano temo in sklop snovi.

Snov je navedena z oznako poglavja iz dokumenta *Matematika na maturi – cilji*, da lahko nalogo neposredno povežemo s standardi znanja.

2.1 1.–2. letnik

1. Naravna in cela števila

- **Usklajevanje izmen na dveh strojih/linijah** – najmanjši skupni večkratnik ciklov, kdaj se urnika znova poravnata.
- **Zobniki različnih velikosti** – zakaj imajo zobniki pogosto praštevilsko število zob (enakomerna obraba), v/D pri vrtenju.
- **Kontrolna številka pri EAN/ISBN kodi** – deljivost in modularni izračun kontrolne številke izdelka/knjige.
- **Shranjevanje podatkov v računalniku** – pretvorba med desetiškim in dvojiškim zapisom (bit, bajt).

2. Algebrski izrazi, enačbe in neenačbe

- **Mešanje raztopin različnih koncentracij** – npr. sirup, čistilo, kislina; linearna enačba za zeleno mešanico.
- **Delitev računa/najema med prijatelji glede na porabo** – postavitve in reševanje enačbe.
- **Prilagajanje recepta za drugo število oseb** – sorazmerja in enačbe.
- **Načrtovanje žepnine/proračuna za izlet** – neenačbe (koliko največ lahko porabim).
- **Vietovo pravilo pri hitrem preverjanju rešitev kvadratne enačbe** – npr. pri nalogah o metu žoge (čas leta).

3. Osnove logike

- **Logična vezja v elektronskih napravah** – AND, OR, NOT vezja in njihova uporaba.
- **Iskanje po spletu ali bazi podatkov z logičnimi operatorji** – AND/OR/NOT pri iskalnih poizvedbah.
- **Uganke o resnicoljubcih in lažnivcih** – logično sklepanje in izjavni račun.
- **Veljavnost pravnih/sodnih sklepov** – osnovni silogizmi in pravilno sklepanje.

4. Množice

- **Vennovi diagrami pri šolski anketi** – npr. dijaki, ki obiskujejo matematični IN športni krožek.
- **Filtri v spletni trgovini** – presek in unija množic izdelkov.
- **Poizvedbe v Excelu/bazi podatkov** – unija, presek, razlika podatkovnih naborov.
- **Alergije in sestavljanje jedilnika** – dovoljena/prepovedana živila kot množice.

5. Racionalna števila

- **Popusti in akcije v trgovini** – odstotki, promili, primerjava dejanskih prihrankov.
- **Obrestna mera pri potrošniškem kreditu** – odstotni račun na konkretnem primeru ponudbe.
- **Statistika metov v košarki ali strelav na gol** – odstotek uspešnosti.
- **Recepti in razredčevanje** – barve, čistila; razmerja in deleži.

6. Realna števila

- **Zaokroževanje pri tehničnih meritvah** – napake meritev v gradbeništvu ali strojništvu.
- **Dokaz iracionalnosti $\sqrt{2}$** – Pitagorejci in diagonala kvadrata ter razlogi za propad pitagorejske šole.
- **Natančnost GPS koordinat** – koliko decimalnih mest dejansko pomeni na terenu.
- **Merilna negotovost pri meritvi temperature ali dolžine** – zapis z intervalom.

7. Pravokotni koordinatni sistem

- **Igra Bojne ladje ali šahovnica** – koordinatni sistem v praksi.
- **Iskanje lokacij na zemljevidu/GPS** – uporaba koordinat.
- **Zračna razdalja med dvema krajema** (npr. Krško–Ljubljana) – izračun s formulo za razdaljo med točkama.
- **Piksli na zaslonu telefona/računalnika** – koordinatni sistem digitalne slike.

8. Linearna funkcija

- **Cenik taksija ali parkirišča** – začetna postavka + cena na km/uro kot linearna funkcija.
- **Poraba goriva glede na prevoženo razdaljo.**
- **Pretvorba temperature med Celzijem in Fahrenheitom** – linearna zveza.
- **Najem opreme (kolesa, šotora, ozvočenja)** – fiksni in spremenljivi stroški.
- **Načrtovanje proizvodnje z omejenimi viri** (npr. pekarna, čebelarstvo) – linearno programiranje.

9. Evklidska geometrija v ravnini

- **Merjenje širine reke ali druge nedostopne razdalje** – podobnost trikotnikov.
- **Načrtovanje vrta ali igrišča** – obseg in ploščina lika.
- **Talesov izrek in obodni/središčni kot** – pri načrtovanju krožnih objektov (rondo, kupola, kolo).
- **Zlati rez v oblikovanju** – logotip, fotografija, embalaža.

10. Vektorji v ravnini in prostoru

- **Vlečenje sani ali vozička pod kotom** – seštevanje sil kot vektorjev.
- **Navigacija čolna ali letala ob vetru/toku** – vektorsko seštevanje hitrosti.
- **Premikanje lika v videoigri** – vektor premika in hitrosti.
- **Smer in razdalja pri GPS navigaciji** – zapis poti kot vektorja.

11. Potence z racionalnimi eksponenti

- **Škaliranje arhitekturnih maket** – koreni pri preračunu površin/prostornin ob spremembi merila.
- **Čas prostega pada predmeta** – koren v formuli za čas padca z dane višine.
- **Izračun stranice kvadrata ali polmera kroga iz znane ploščine** – korenjenje.

12. Kompleksna števila

- **Izmenični tok v elektrotehniki** – impedanca kot kompleksno število.
- **Fraktali (Mandelbrotova množica)** – kompleksna ravnina in iteracija.
- **Nihanje/dušenje v fiziki** – kvadratne enačbe brez realnih rešitev.

13. Funkcije in njene lastnosti

- **Cenik vozovnice ali parkirnine po conah** – odsekoma podana funkcija.
- **Dnevni diagram porabe elektrike ali vode** – branje lastnosti funkcije (naraščanje, ničle, ekstremi) iz grafa.
- **Pretvorbe med valutami ali merskimi enotami** – funkcija in njen predpis.

14. Potenčna in korenska funkcija

- **Odvisnost prostornine/površine posode od dolžine roba** – kvadratna/kubična rast.
- **Odpor zraka pri padalstvu** – korenska odvisnost hitrosti padanja.
- **Keplerjev tretji zakon** – odvisnost obhodnega časa planeta (T) od velike polosi tirnice (a): $T^2 \sim a^3$.

15. Kvadratna funkcija

- **Višina žoge v odvisnosti od časa pri metu** – košarka, nogomet, odbojka.
- **Optimizacija ograjenega vrta pri dani dolžini ograje** – največja možna ploščina.
- **Dobiček podjetja v odvisnosti od cene izdelka** – kvadratni model dobička.
- **Oblika mostu ali loka** – parabolični profil konstrukcije.

2.2 3.–4. letnik

16. Eksponentna in logaritemska funkcija

- **Rihterjeva lestvica merjenja potresov** – logaritemska lestvica jakosti; primerjava potresov v Sloveniji (npr. Krško 1917, Posočje 1998/2004).
- **pH lestvica** – logaritemska lestvica kislosti/bazičnosti; primeri iz vsakdana (voda, kisline v gospodinjstvu).
- **Decibelna lestvica jakosti zvoka** – zakaj je zvok merjen logaritemsko; primerjava glasnosti prometa, koncerta, praga bolečine.
- **Obrestno obrestovanje** – rast privarčevanega zneska/posojila; primerjava ponudb slovenskih bank.
- **Razpolovni čas radioaktivnih snovi** – ogljikovo datiranje (C-14) pri arheoloških najdbah.
- **Eksponentna rast populacije bakterij/prebivalstva** – modeliranje z eksponentno funkcijo.
- **Newtonov zakon ohlajanja** – ohlajanje kave/teles, eksponentni upad temperature.

- **Amortizacija vrednosti avtomobila** – eksponentni padec vrednosti rabljenega vozila skozi leta.
- **Širjenje virusa v začetni fazi epidemije** – eksponentni model rasti (npr. gripa, COVID-19 v prvih tednih).

17. Kotne funkcije

- **Merjenje višine objekta s kotnimi funkcijami** – npr. dimnik TEB Brestanica, cerkveni zvonik, drevo; merjenje kota in razdalje ter izračun višine.
- **Dolžina sence skozi dan/leto** – odvisnost od sončne elevacije, trigonometrični model.
- **Nihanje gugalnice ali nihala** – modeliranje odmika s sinusno funkcijo.
- **Plimovanje** – nihanje višine morja kot sinusna funkcija časa.
- **Izmenična električna napetost (AC)** – sinusni signal v gospodinjskem omrežju (230 V, 50 Hz).
- **Koti med kazalci ure** – izračun kota med urnim in minutnim kazalcem ob poljubni uri.
- **GPS in triangulacija** – določanje lege s pomočjo kotov/razdalj do znanih točk.

18. Krivulje drugega reda (stožnice)

- **Parabolične satelitske antene** – lastnost žarišča parabole in zbiranje signala.
- **Balistika – let žoge ali izstrelka** – parabolična trajektorija, doseg in največja višina.
- **Keplerjevi zakoni – eliptične tirnice planetov** – Zemljina tirnica kot elipsa.
- **Viseči most vs. verižnica in parabola** – primerjava oblik nosilnih kablov (npr. na konkretnem mostu).
- **Šepetalnice (whispering galleries)** – eliptična lastnost odboja zvoka v prostorih eliptičnega tlorisa.
- **Sončna peč / solarni koncentrador** – uporaba parabole za zbiranje sončne energije.

19. Polinomi in racionalne funkcije

- **Optimalna prostornina škatle iz pole papirja** – kubični polinom in iskanje maksimuma (lahko brez odvoda, z grafom/tabelo).
- **Modeliranje stroškov proizvodnje** – polinomska funkcija skupnih stroškov v odvisnosti od količine.
- **Aproksimacija izmerjenih podatkov s polinomom** – npr. dnevno nihanje temperature.
- **Zavorna pot vozila** – odvisnost zavorne poti od hitrosti (kvadratni/polinomski model).

22. Zaporedja

- **Hanojski stolpi** – število potez kot geometrijsko zaporedje/eksponentna rast.
- **Prepogibanje papirja** – geometrijsko zaporedje debeline lista (in zakaj je 7-krat praktična meja).
- **Verižna pisma / piramidne sheme** – geometrijska rast števila udeležencev.
- **Anuitetno varčevanje ali odplačevanje kredita** – aritmetično/geometrijsko zaporedje obrokov.
- **Fibonaccijevo zaporedje v naravi** – storžki, sončnice, razporeditev listov.

23. Diferencialni račun

- **Optimizacija embalaže** – pločevinka ali škatla z najmanjšo porabo materiala pri dani prostornini.
- **Hitrost in pospešek vozila** – odvod poti po času iz podatkov o vožnji (npr. GPS sledenje).
- **Mejni stroški in mejni dobiček** – odvod funkcije stroškov/prihodka v ekonomiji, optimalna cena izdelka.
- **Reševalec na plaži (Snellov problem)** – najhitrejša pot do tonočega ob spremembi hitrosti (voda/pesek).
- **Oblika mostu ali loka za minimalno porabo materiala** – optimizacijski problem z odvodom.

24. Integralni račun

- **Prevožena pot iz grafa hitrosti** – integral hitrosti po času (npr. iz podatkov vozila ali kolesarjenja).
- **Površina nepravilne parcele ali jezera** – numerična ocena s pomočjo integrala/vsote pravokotnikov.
- **Prostornina vrtenine** – kozarec, sod ali vaza kot telo, dobljeno z vrtenjem krivulje.
- **Delo raztezanja vzmeti (Hookov zakon)** – izračun opravljenega dela z integralom sile.
- **Poraba goriva iz diagrama hitrosti/pretoka** – skupna poraba kot ploščina pod grafom.

25. Kombinatorika

- **Varnost gesel in PIN kod** – število možnih kombinacij glede na dolžino in nabor znakov.
- **Žreb športne lige ali turnirja** – število možnih razporedov/parov tekem.
- **Registrske tablice** – koliko različnih kombinacij dopušča slovenski sistem tablic.
- **Loto 7 od 39** – verjetnost zadetka glede na število možnih kombinacij.

26. Verjetnostni račun

- **Verjetnost pri igrah na srečo** – kocka, karte, ruleta.
- **Medicinsko testiranje in Bayesov izrek** – verjetnost dejanske bolezni ob pozitivnem testu (lažno pozitivni rezultati).
- **Rojstnodnevni paradoks** – verjetnost, da imata dva dijaka v razredu isti rojstni dan.
- **Zavarovalna premija glede na tveganje** – osnovni izračun pričakovane vrednosti izplačila.
- **Vremenska napoved – verjetnost padavin** – kako razumeti in interpretirati odstotek verjetnosti.

27. Statistika

- **Analiza uspeha dijakov pri maturi** – statistična obdelava (povprečje, mediana, standardni odklon) realnih ali javno dostopnih podatkov.
- **Anketa med dijaki šole** – zbiranje in statistična obdelava lastnih podatkov (npr. čas za domačo nalogo, raba telefona).
- **Statistika prometnih nesreč v Posavju** – analiza javno dostopnih podatkov (npr. AVP, SURS).
- **Športna statistika** – analiza rezultatov kluba ali reprezentance (povprečja, odstopanja).

- **Poraba elektrike/vode v gospodinjstvu čez leto** – statistična analiza in iskanje trenda.

Namig: pri izbiri naj dijak preveri, da za izbrano situacijo obstajajo dostopni realni podatki (uradne statistike, meritve, javno dostopni viri), saj to nalogo naredi bolj konkretno in verodostojno.