



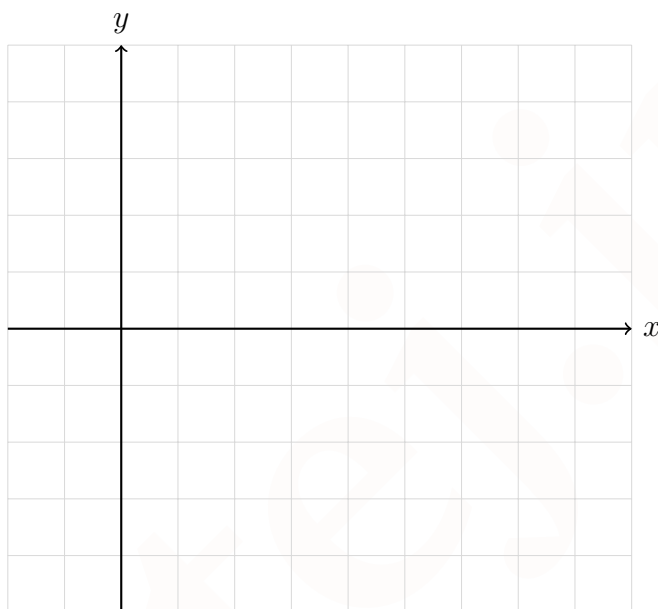
Ime in Priimek: _____

Naloga 1:

5 + 5

Dana je funkcija $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} - 4$.

- a) Izračunaj ničlo funkcije f in določi točko na grafu $T\left(x, -\frac{127}{32}\right)$. Nariši graf funkcije f (označi asimptoto ter obe dobljeni točki).
- b) Zapiši inverzno funkcijo f^{-1} . Določi enačbo asimptote in ničlo funkcije f^{-1} .



Naloga 2:

5

Reši enačbo, rešitev zapiši na štiri mesta:

$$3^{1-x} = 2^x$$

Naloga 3:

4 + 4

Reši enačbi:

a) $\log_3 (\log_2 (x + 1)) = e^{\ln 2}$

b) $\log_2 x + \log_4 x + \frac{3}{2} = 0$

Naloga 4:

4

Zapiši definicijsko območje funkcije

$$f(x) = \ln((2x - 1)(x + 1)).$$

Naloga 5:

4 + 4

a) Naj bo $\ln x = \frac{1}{3}$, $\ln y = 2$, $\ln z = -\frac{1}{4}$. Izračunaj

$$\ln \left(\frac{e x^3}{\sqrt{y z^{-1}}} \right).$$

b) Določi x , če je

$$\log x = 2 \log 3 + \frac{1}{2} \log 9 - \frac{1}{\log_{27} 10}.$$

Izračunaj produkt rešitev enačbe

$$\log_2(x^{\log_2 x}) = \log_2(x^2) + \log_2 4.$$

Število doseženih točk na testu

Odstotki	[0, 45)	[45, 60)	[60, 75)	[75, 90)	[90, 100]	Št. možnih točk	Dosežene točke	OCENA
Ocena	1	2	3	4	5	40		

Analiza Naloge 1: – eksponentna funkcija in njen inverz

Dana je $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} - 4$. Funkcija je padajoča, njena horizontalna asimptota je $y = -4$.

a) Ničlo dobimo iz $f(x) = 0$:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} = 4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \Rightarrow x - 2 = -2 \Rightarrow x = 0.$$

Funkcija ima ničlo pri $x = 0$, torej gre graf skozi točko $(0, 0)$.

Za drugo točko rešimo $f(x) = -\frac{127}{32}$:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} - 4 = -\frac{127}{32} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} = 4 - \frac{127}{32} = \frac{128 - 127}{32} = \frac{1}{32} = \left(\frac{1}{2}\right)^5.$$

Sledi $x - 2 = 5$, torej $x = 7$ in $T\left(7, -\frac{127}{32}\right)$.

Graf je padajoča eksponentna krivulja s horizontalno asimptoto $y = -4$, ki poteka skozi točki $(0, 0)$ in $\left(7, -\frac{127}{32}\right)$ (slednja je praktično že tik ob asimptoti).

b) Inverzno funkcijo dobimo tako, da zamenjamo vlogi x in y ter izrazimo novi y :

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} - 4 \Rightarrow x = \left(\frac{1}{2}\right)^{y-2} - 4 \Rightarrow x + 4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{y-2} \\ &\Rightarrow y - 2 = \log_{1/2}(x + 4) \Rightarrow y = \log_{1/2}(x + 4) + 2. \end{aligned}$$

Torej

$$f^{-1}(x) = \log_{1/2}(x + 4) + 2, \quad D_{f^{-1}} = (-4, \infty).$$

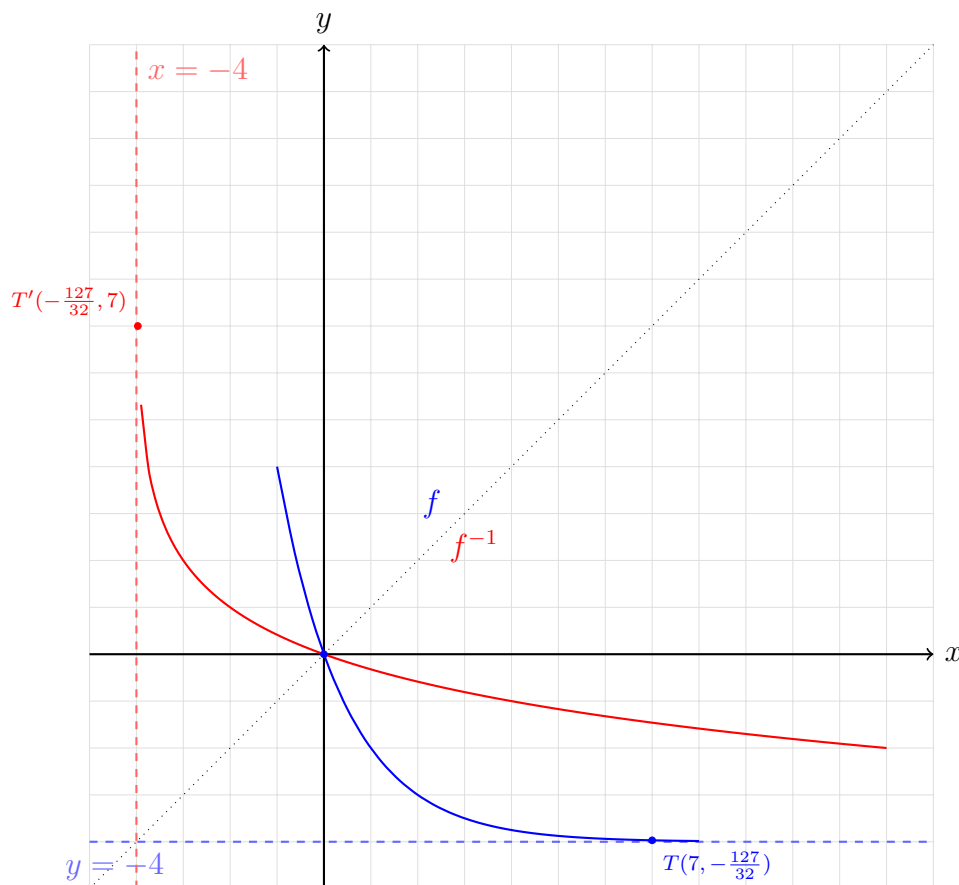
Ker je graf f^{-1} zrcalna slika grafa f prek premice $y = x$, je asimptota funkcije f^{-1} **navpična** premica

$$x = -4.$$

Ničlo funkcije f^{-1} dobimo iz $f^{-1}(x) = 0$:

$$\log_{1/2}(x + 4) + 2 = 0 \Rightarrow \log_{1/2}(x + 4) = -2 \Rightarrow x + 4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4 \Rightarrow x = 0.$$

(To se ujema s tem, da je $f(0) = 0$, zato mora biti tudi $f^{-1}(0) = 0$.)



Analiza Naloge 2: – eksponentna enačba

Enačbo $3^{1-x} = 2^x$ rešimo tako, da logaritmiramo obe strani (naravni logaritem):

$$\ln(3^{1-x}) = \ln(2^x) \implies (1-x) \ln 3 = x \ln 2.$$

Izpostavimo x :

$$\ln 3 - x \ln 3 = x \ln 2 \implies \ln 3 = x(\ln 2 + \ln 3) = x \ln 6.$$

Sledi

$$x = \frac{\ln 3}{\ln 6} = \log_6 3 = 1 - \log_6 2 \approx 0,6131.$$

Analiza Naloge 3: – logaritemski enačbi

a) $e^{\ln 2} = 2$, $\log_3(\log_2(x+1)) = 2$. Iz definicije logaritma sledi

$$\log_2(x+1) = 3^2 = 9 \implies x+1 = 2^9 = 512 \implies x = 511.$$

Preverimo definicijsko območje: $x+1 = 512 > 0$ in $\log_2(x+1) = 9 > 0$, zato je rešitev veljavna.

b) $\log_2 x + \log_4 x + \frac{3}{2} = 0$. Ker je $\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x}{2}$, uvedemo substitucijo $t = \log_2 x$:

$$t + \frac{t}{2} + \frac{3}{2} = 0 \implies \frac{3}{2}t = -\frac{3}{2} \implies t = -1.$$

Torej $\log_2 x = -1$, od koder $x = \frac{1}{2}$ (definijsko območje $x > 0$ je izpolnjeno).

Analiza Naloge 4: – definicijsko območje

Ker je $\ln$ definiran le za pozitivne argumente, mora veljati

$$(2x - 1)(x + 1) > 0.$$

Ničli izraza sta $x = \frac{1}{2}$ in $x = -1$. Ker je koeficient pri x^2 pozitiven ($2x^2 + x - 1$), je izraz pozitiven **zunaj** ničel, torej za $x < -1$ ali $x > \frac{1}{2}$. Definicijsko območje je zato

$$D_f = (-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right).$$

Analiza Naloge 5: – računanje z logaritmi

a) Podano imamo $\ln x = \frac{1}{3}$, $\ln y = 2$, $\ln z = -\frac{1}{4}$. Uporabimo pravila za logaritme (produkt, količnik, potenca, koren):

$$\ln \left(\frac{e x^3}{\sqrt{y z^{-1}}} \right) = \ln e + 3 \ln x - \frac{1}{2} (\ln y - \ln z).$$

Vstavimo vrednosti:

$$= 1 + 3 \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \left(2 - \left(-\frac{1}{4} \right) \right) = 1 + 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4} = 2 - \frac{9}{8} = \frac{16 - 9}{8} = \frac{7}{8}.$$

Torej je iskana vrednost $\frac{7}{8}$.

b) $\log x = 2 \log 3 + \frac{1}{2} \log 9 - \frac{1}{\log_{27} 10}$. Ker je $\log_{27} 10 = \frac{\log 10}{\log 27} = \frac{1}{\log 27}$ (saj je $\log 10 = 1$), sledi

$$\frac{1}{\log_{27} 10} = \log 27.$$

Nadalje je $2 \log 3 = \log 9$, $\frac{1}{2} \log 9 = \frac{1}{2} \log(3^2) = \log 3$ in $\log 27 = \log(3^3) = 3 \log 3$. Torej

$$\log x = \log 9 + \log 3 - \log 27 = \log \left(\frac{9 \cdot 3}{27} \right) = \log 1 = 0 \implies x = 1.$$

Analiza Naloge 6: – logaritemska enačba s produktom rešitev

Definicijsko območje: $x > 0$. Levo stran preoblikujemo s pravilom $\log_b(a^c) = c \log_b a$:

$$\log_2(x^{\log_2 x}) = (\log_2 x) \cdot (\log_2 x) = (\log_2 x)^2.$$

Desno stran združimo:

$$\log_2(x^2) + \log_2 4 = 2 \log_2 x + 2.$$

Z uvedbo $t = \log_2 x$ dobimo kvadratno enačbo

$$t^2 = 2t + 2 \implies t^2 - 2t - 2 = 0.$$

Rešitvi sta

$$t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}.$$

Ker je $t = \log_2 x$, sta rešitvi za x enaki

$$x_1 = 2^{1+\sqrt{3}}, \quad x_2 = 2^{1-\sqrt{3}},$$

obe pa ustrezata definicijskemu območju ($x_1, x_2 > 0$). Produkt rešitev je

$$x_1 \cdot x_2 = 2^{(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})} = 2^2 = 4.$$