



Ime in Priimek: _____

Naloga 1:

4 + 3

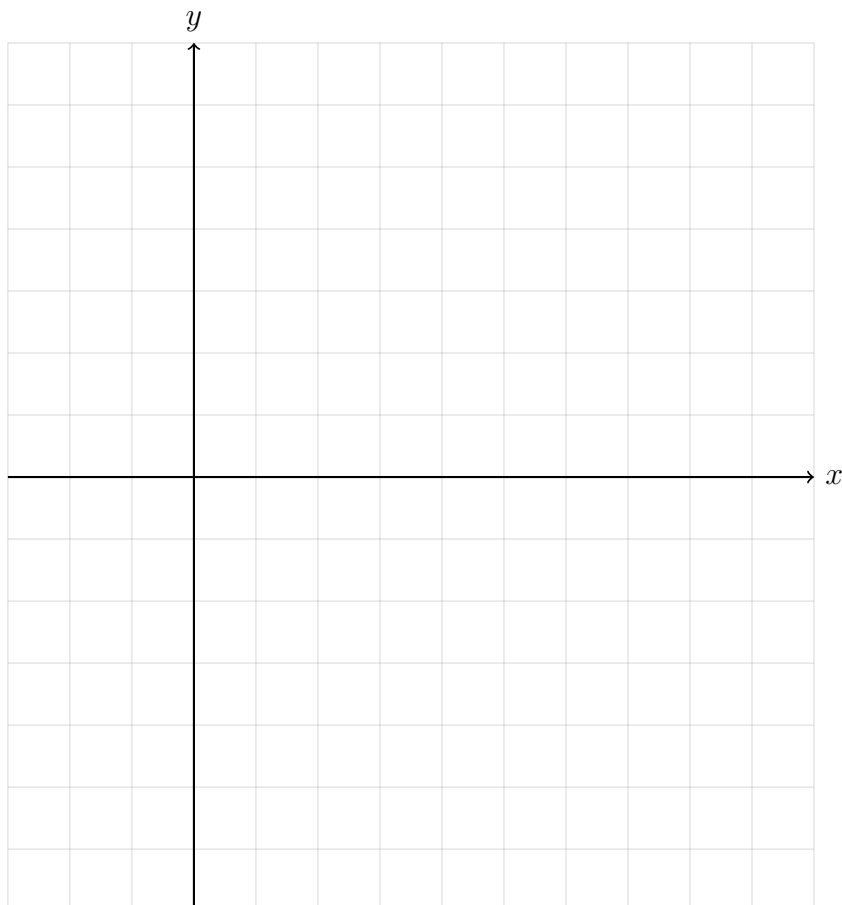
Reši enačbo:

a) $5^{x-1} = 5^x - 25 \cdot 2^{x-1}$

b) $4^x = 5$ (rezultat zaokroži na štiri decimalna mesta).

Dana je funkcija $f(x) = \log_{1/2}(x + 2) - 1$.

- a) Izračunaj $f(14)$.
b) Za kateri x je vrednost funkcije f enaka -6 ?
c) Zapiši inverzno funkcijo f^{-1} in jo nariši.
d) Izračunaj presečišče funkcije f s funkcijo $g(x) = \log_2(x - 5) - 4$.



Naloga 3:

4 + 4

a) Izračunaj

$$\log_3 3 - \ln e + \log_2 \frac{1}{16} + 3^{\log_3 2}.$$

b) Izračunaj

$$\log \frac{1}{2} + \log \frac{2}{3} + \log \frac{3}{4} + \cdots + \log \frac{99}{100}.$$

a) Določi x , če je

$$\log x = 2 + \log_4 20 - \log_4 5 - \log_4 32.$$

b) Naj bo $p = \ln n$, $q = \ln m$. Izrazi s p in q vrednost logaritma

$$\ln\left(\frac{m n^2}{\sqrt{e}}\right).$$

Naloga 5:

4

Določi x , da bo funkcija

$$y = \ln(x^2 + x) - 2\ln(\sqrt{2})$$

pozitivna.

Število doseženih točk na testu

Odstotki	[0, 45)	[45, 60)	[60, 75)	[75, 90)	[90, 100]	Št. možnih točk	Dosežene točke	OCENA
Ocena	1	2	3	4	5	40		

Analiza Naloge 1: – eksponentni enačbi

a) $5^{x-1} = 5^x - 25 \cdot 2^{x-1}$. Ker je $5^{x-1} = \frac{5^x}{5}$, prenesemo vse člene z 5^x na eno stran:

$$25 \cdot 2^{x-1} = 5^x - \frac{5^x}{5} = \frac{4}{5} \cdot 5^x.$$

Pomnožimo z 5 in zapišemo $2^{x-1} = \frac{2^x}{2}$:

$$125 \cdot \frac{2^x}{2} = 4 \cdot 5^x \implies \frac{125}{2} \cdot 2^x = 4 \cdot 5^x.$$

Delimo z 5^x in z $\frac{125}{2}$:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{4 \cdot 2}{125} = \frac{8}{125} = \left(\frac{2}{5}\right)^3 \implies x = 3.$$

Preverimo: $5^2 = 25$ in $5^3 - 25 \cdot 2^2 = 125 - 100 = 25$. ✓

b) $4^x = 5$. Logaritmiramo:

$$x = \log_4 5 = \frac{\ln 5}{\ln 4} = \frac{\log 5}{\log 4} \approx \frac{0,6990}{0,6021} \approx 1,1610.$$

Analiza Naloge 2: – logaritemska funkcija in njen inverz

Dana je $f(x) = \log_{1/2}(x+2) - 1$, definicijsko območje $x > -2$ (navpična asimptota $x = -2$). Ker je osnova $\frac{1}{2} < 1$, je funkcija **padajoča**.

a)

$$f(14) = \log_{1/2}(16) - 1 = \log_{1/2}(2^4) - 1 = -4 - 1 = -5.$$

b) Rešimo $f(x) = -6$:

$$\log_{1/2}(x+2) - 1 = -6 \implies \log_{1/2}(x+2) = -5 \implies x+2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 32 \implies x = 30.$$

c) Zamenjamo vlogi x in y ter izrazimo nov y :

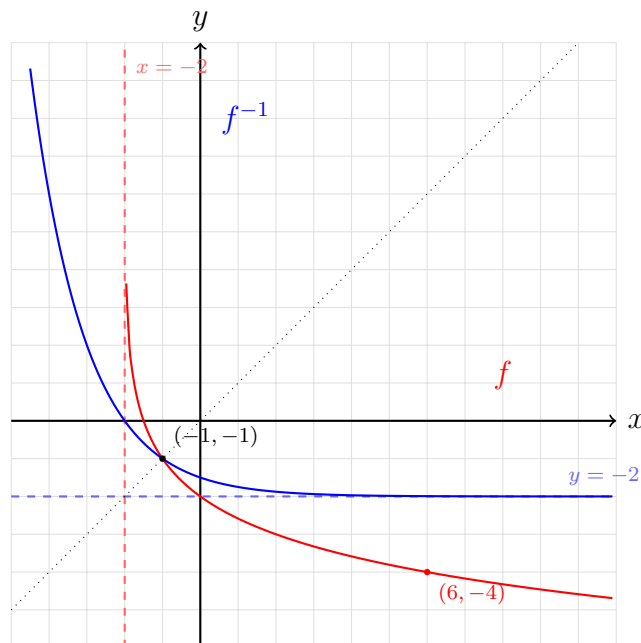
$$y = \log_{1/2}(x+2) - 1 \implies x = \log_{1/2}(y+2) - 1 \implies x+1 = \log_{1/2}(y+2)$$

$$\implies y+2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \implies y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 2.$$

Torej

$$f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 2, \quad D_{f^{-1}} = \mathbb{R}, \quad \text{horizontalna asimptota } y = -2.$$

Graf f^{-1} je zrcalna slika grafa f prek premice $y = x$ (obe krivulji se sekata na tej premici v točki $(-1, -1)$, saj je $f(-1) = -1$).



(Točki $(14, -5)$ in $(30, -6)$ iz a) in b) ležita na krivulji f precej dlje v desno/navzdol in zaradi preglednosti nista prikazani na tej skici.)

d) Iščemo presek s $g(x) = \log_2(x - 5) - 4$ (definicijsko območje $x > 5$). Ker je $\log_{1/2} t = -\log_2 t$, lahko f zapišemo kot $f(x) = -\log_2(x + 2) - 1$. Iz $f(x) = g(x)$ sledi

$$-\log_2(x + 2) - 1 = \log_2(x - 5) - 4 \implies \log_2(x + 2) + \log_2(x - 5) = 3$$

$$\implies \log_2[(x + 2)(x - 5)] = 3 \implies (x + 2)(x - 5) = 2^3 = 8.$$

Uredimo:

$$x^2 - 3x - 10 = 8 \implies x^2 - 3x - 18 = 0 \implies (x - 6)(x + 3) = 0 \implies x = 6 \text{ ali } x = -3.$$

Ker mora biti $x > 5$ (zaradi g), je edina veljavna rešitev $x = 6$. Preverimo:

$$f(6) = \log_{1/2}(8) - 1 = -3 - 1 = -4, \quad g(6) = \log_2(1) - 4 = 0 - 4 = -4. \checkmark$$

Presečišče je torej točka $(6, -4)$.

Analiza Naloge 3: – računanje z logaritmi

a) Vsak člen poenostavimo posebej: $\log_3 3 = 1$, $\ln e = 1$, $\log_2 \frac{1}{16} = \log_2(2^{-4}) = -4$, in po pravilu $a^{\log_a x} = x$ je $3^{\log_3 2} = 2$. Torej

$$\log_3 3 - \ln e + \log_2 \frac{1}{16} + 3^{\log_3 2} = 1 - 1 - 4 + 2 = -2.$$

b) Vsoto logaritmov zapišemo kot logaritem produkta:

$$\log \frac{1}{2} + \log \frac{2}{3} + \dots + \log \frac{99}{100} = \log \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100} \right).$$

Produkt je teleskopski – vsak števec (razen prvega) se okrajša s prejšnjim imenovalcem:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100} = \frac{1}{100}.$$

Torej je vsota

$$\log \frac{1}{100} = \log(10^{-2}) = -2.$$

Analiza Naloge 4: – računanje z logaritmi II

a) Vse logaritme z desne strani (razen konstante 2) najprej združimo – gre za logaritme z osnovo 4:

$$\log_4 20 - \log_4 5 - \log_4 32 = \log_4 \left(\frac{20}{5} \right) - \log_4 32 = \log_4 4 - \log_4 32 = 1 - \log_4 32.$$

Ker je $4^{5/2} = 4^2 \cdot 4^{1/2} = 16 \cdot 2 = 32$, je $\log_4 32 = \frac{5}{2}$, zato

$$\log_4 20 - \log_4 5 - \log_4 32 = 1 - \frac{5}{2} = -\frac{3}{2}.$$

Torej

$$\log x = 2 + \left(-\frac{3}{2} \right) = \frac{1}{2}.$$

Sledi

$$x = 10^{1/2} = \sqrt{10} \approx 3,162.$$

b) Izraz razstavimo s pravili za logaritem produkta, kvocienta, potence in korena:

$$\ln \left(\frac{m n^2}{\sqrt{e}} \right) = \ln m + \ln(n^2) - \ln \sqrt{e} = \ln m + 2 \ln n - \frac{1}{2} \ln e.$$

Ker je $\ln n = p$, $\ln m = q$ in $\ln e = 1$, sledi

$$\ln \left(\frac{m n^2}{\sqrt{e}} \right) = q + 2p - \frac{1}{2}.$$

Analiza Naloge 5: – logaritemska neenačba

Najprej določimo definicijsko območje: argument logaritma mora biti pozitiven,

$$x^2 + x > 0 \implies x(x + 1) > 0 \implies x < -1 \text{ ali } x > 0.$$

Želimo, da je $y > 0$:

$$\ln(x^2 + x) - 2 \ln \sqrt{2} > 0.$$

Ker je $2 \ln \sqrt{2} = \ln(\sqrt{2})^2 = \ln 2$, se pogoj poenostavi v

$$\ln(x^2 + x) > \ln 2.$$

Ker je $\ln$ naraščajoča funkcija, je to ekvivalentno

$$x^2 + x > 2 \implies x^2 + x - 2 > 0 \implies (x + 2)(x - 1) > 0 \implies x < -2 \text{ ali } x > 1.$$

To območje je že v celoti vsebovano v definicijskem območju ($x < -2 \subset x < -1$ in $x > 1 \subset x > 0$), zato je končna rešitev

$$x \in (-\infty, -2) \cup (1, \infty).$$