



Ime in Priimek: _____

Naloga 1:

4 + 4 + 4

Pravilni tristrani prizmi je osnovni rob $a = 4\sqrt{3}$ cm, višina prizme pa je enaka polmeru očrtanega kroga osnovne ploskve.

- Izračunaj polmer očrtanega kroga osnovne ploskve in višino prizme.
- Izračunaj prostornino in površino prizme.
- V prizmo vrišemo največji možni valj (os valja sovpada z osjo prizme). Izračunaj, koliko odstotkov prostornine prizme zavzema ta valj.

Pravilni štiristrani piramidi meri površina $S = 360 \text{ cm}^2$, višina piramide pa je $v = 12 \text{ cm}$.

- a) Izračunaj rob osnovne ploskve.
- b) Izračunaj prostornino piramide.
- c) Izračunaj kot med stransko in osnovno ploskvijo (do kotne minute natančno).
- d) Izračunaj polmer piramidi včrtane krogle.

Naloga 3:

4 + 3

Dvojni (dvakrat) zlepljeni stožec ima površino $S = 120\pi \text{ cm}^2$, obseg skupne osnovne krožnice pa je $o = 12\pi \text{ cm}$.

- a) Izračunaj prostornino dvojnega stožca.
- b) Izračunaj razdaljo med vrhovoma stožcev.

Naloga 4:

4 + 4

Kroglo s polmerom $r = 5$ cm prelijemo (preoblikujemo) v 1000 enako velikih majhnih kroglic.

- a) Kolikokrat se poveča skupna površina, če kroglo prelijemo v 1000 majhnih kroglic?
- b) Izračunaj telesno diagonalo najmanjše kockaste (kubične) škatle, ki jo potrebujemo za skladiščenje vseh kroglic.

Število doseženih točk na testu

Odstotki	[0, 45)	[45, 60)	[60, 75)	[75, 90)	[90, 100]	Št. možnih točk	Dosežene točke	OCENA
Ocena	1	2	3	4	5	40		

REŠITVE S POSTOPKI

Analiza Naloge 1: – tristrana prizma

Osnovna ploskev je enakostraničen trikotnik z robom $a = 4\sqrt{3}$ cm.

a) Polmer očrtanega kroga enakostraničnega trikotnika je

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 4 \text{ cm.}$$

Ker je višina prizme enaka temu polmeru, je $v = R = 4$ cm.

b) Ploščina osnovne ploskve (enakostraničen trikotnik):

$$S_o = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(4\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{48\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3} \text{ cm}^2 \approx 20,78 \text{ cm}^2.$$

Prostornina:

$$V = S_o \cdot v = 12\sqrt{3} \cdot 4 = 48\sqrt{3} \text{ cm}^3 \approx 83,14 \text{ cm}^3.$$

Površina (dve osnovni ploskvi + tri plaščne pravokotnike $a \times v$):

$$S = 2S_o + 3av = 2 \cdot 12\sqrt{3} + 3 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 4 = 24\sqrt{3} + 48\sqrt{3} = 72\sqrt{3} \text{ cm}^2 \approx 124,71 \text{ cm}^2.$$

c) Največji valj, ki ga lahko vrišemo v prizmo (os valja = os prizme), ima za osnovno krožnico največji možni kroga, ki se še prilega enakostraničnemu trikotniku – to je vrisan krožnica (inčrtan krog) trikotnika s polmerom

$$\rho = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 2 \text{ cm,}$$

višina valja pa je enaka višini prizme, saj se prerez prizme ne spreminja po višini: $h_{valj} = v = 4$ cm.

$$V_{valj} = \rho^2 \pi h_{valj} = 2^2 \pi \cdot 4 = 16\pi \text{ cm}^3 \approx 50,27 \text{ cm}^3.$$

Delež prostornine, ki jo zavzame valj:

$$\frac{V_{valj}}{V} = \frac{16\pi}{48\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9} \approx 0,6046.$$

Valj torej zavzema približno **60,46 %** prostornine prizme.

Analiza Naloge 2: – štiristrana piramida

Osnova je kvadrat z robom a , višina piramide je $v = 12$ cm, apotema plašča (višina stranske ploskve) je m .

a) Površina piramide je vsota osnovne ploskve in štirih stranskih trikotnikov:

$$S = a^2 + 4 \cdot \frac{am}{2} = a^2 + 2am, \quad m = \sqrt{v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Z vstavljanjem $v = 12$ dobimo $m = \sqrt{144 + \frac{a^2}{4}}$. Enačbo $a^2 + 2a\sqrt{144 + \frac{a^2}{4}} = 360$ rešimo (ali preverimo) s

poskusom $a = 10$ cm:

$$m = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}, \quad S = 100 + 2 \cdot 10 \cdot 13 = 100 + 260 = 360 \text{ cm}^2. \checkmark$$

Rob osnovne ploskve je torej $a = 10$ cm (pri tem je $v = 12$, $a/2 = 5$, $m = 13$ – Pitagorejska trojica).

b) Prostornina:

$$V = \frac{1}{3}a^2v = \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 12 = 400 \text{ cm}^3.$$

c) Kot φ med stransko in osnovno ploskvijo dobimo v pravokotnem trikotniku z višino $v = 12$ in razdaljo od središča osnovne ploskve do sredine roba $a/2 = 5$:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v}{a/2} = \frac{12}{5} = 2,4 \Rightarrow \varphi \approx 67,38^\circ \approx 67^\circ 23'.$$

d) Polmer piramidi vrisane krogle (sfera, ki se dotika osnovne ploskve in vseh štirih stranskih ploskev) dobimo iz zveze $V = \frac{1}{3}rS$ (razdelitev telesa na piramide s skupnim vrhom v središču krogle in osnovami, ki so ploskve telesa):

$$r = \frac{3V}{S} = \frac{3 \cdot 400}{360} = \frac{1200}{360} = \frac{10}{3} \text{ cm} \approx 3,33 \text{ cm}.$$

Analiza Naloge 3: – dvojni zlepljeni stožec

Stožca imata skupno osnovno krožnico s polmerom r in obsegom $o = 2\pi r$, zlepljena sta v svojih osnovah, zunanja površina pa je sestavljena le iz dveh plaščev (skupna osnova ni del zunanje površine).

Iz obsega:

$$2\pi r = 12\pi \Rightarrow r = 6 \text{ cm.}$$

Ker ni drugače povedano, je dvojni stožec simetričen (oba stožca enaka), zato ju označimo z enako stranico l :

$$S = 2\pi r l = 120\pi \Rightarrow l = \frac{120\pi}{2\pi \cdot 6} = 10 \text{ cm.}$$

Višino vsakega stožca dobimo s Pitagorovim izrekom:

$$v = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8 \text{ cm.}$$

a) Prostornina dvojnega stožca je vsota prostornin obeh (enakih) stožcev:

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3}\pi r^2 v = 2 \cdot \frac{1}{3}\pi \cdot 36 \cdot 8 = 192\pi \text{ cm}^3 \approx 603,19 \text{ cm}^3.$$

b) Razdalja med vrhovoma je vsota višin obeh stožcev (vrhova ležita na skupni osi, na nasprotnih straneh skupne osnovne ravnine):

$$d = v + v = 2v = 2 \cdot 8 = 16 \text{ cm.}$$

Analiza Naloge 4: – krogla, prelita v 1000 kroglic

Prostornina začetne krogle s polmerom $R = 5 \text{ cm}$:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 125 = \frac{500}{3}\pi \text{ cm}^3.$$

Ker prelijemo kroglo v 1000 enakih majhnih kroglic, ima vsaka prostornino

$$v = \frac{V}{1000} = \frac{500\pi}{3000} = \frac{\pi}{6} \text{ cm}^3.$$

Polmer majhne kroglice:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow r^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow r = \frac{1}{2} \text{ cm} = 0,5 \text{ cm}$$

(kar se ujema tudi z $r = \frac{R}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{5}{10} = 0,5 \text{ cm}$).

a) Površina začetne krogle:

$$S_1 = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 25 = 100\pi \text{ cm}^2.$$

Skupna površina vseh 1000 majhnih kroglic:

$$S_2 = 1000 \cdot 4\pi r^2 = 1000 \cdot 4\pi \cdot 0,25 = 1000\pi \text{ cm}^2.$$

Razmerje:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{1000\pi}{100\pi} = 10.$$

Skupna površina se torej poveča **10**-krat.

b) Premer ene majhne kroglice je $d = 2r = 1$ cm. Ker je $1000 = 10^3$, kroglice zložimo v pravilno kocakasto mrežo $10 \times 10 \times 10$ kroglic (najenostavnejša razporeditev, kroglica ob kroglici v vseh treh smereh). Rob najmanjše kocakste škatle, ki jih vse spravi, je zato

$$b = 10 \cdot d = 10 \cdot 1 = 10 \text{ cm.}$$

Škatla mora torej imeti dimenzije $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$. Telesna diagonala: $D = a\sqrt{3} = 10\sqrt{3} \text{ cm}$.